مجله رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی
سال دوم، شماره ۵، تابستان ۱۳۹۸
ISSN: ۲۶۴۵-۵۴۳۹
www.jonarbset.ir

توزیع مقادیر ویژه یک عملگر دیفرانسیلی بیضوی غیرخودالحاق در فضای هیلبرت

علی ثامری پور [۱] ، رضا شکری الوار [۲]، رضا علی زاده [۳]
[۱] دانشیار گروه ریاضی دانشگاه لرستان ، خرم آباد ، ایران
[۲] عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد خرم آباد و دانشجوی دکتری آنالیز ریاضی دانشگاه لرستان ، خرم آباد ، ایران
[۳] دبیر ریاضی متوسطه دوم شهرستان دلفان و دانشجوی دکتری آنالیز ریاضی دانشگاه لرستان ، خرم آباد ، ایران

چکیده

در این مقاله می‌خواهیم خواص طیفی عملگر دیفرانسیل بیضوی غیر خودالحاق $(Pu)(t)=-\frac{d}{dt}\left(\left(\sin^{4}t\right)q(t)\frac{du(t)}{dt}\right)$ که در فضای $H_l=L^{2}(0,1)^{l}$ با شرایط مرزی دیریکله تعریف شده است را بررسی کنیم. که $q(t)\in C^{2}([0,1],\mathrm{End}C^{l})$. یک تابع ماتریسی است و در این‌جا فرض می‌کنیم که ماتریس $q(t)$ دارای l مقدار ویژه دوبه‌دو متمایز مانند $\mu_1(t),\mu_2(t),\cdots,\mu_l(t)$ در صفحه مختلط می‌باشد. $j=1,2,\cdots,l$ و $\mu_j(t)\in C^{2}([0,1])$ و این مقادیر ویژه دارای مکان های متفاوت در صفحه مختلط نسبت به قطاع Φ هستند و $\Phi=\{z\in C:|\arg z|\leqslant\phi\}$ که $\phi\in(0,\pi)$. در این مقاله می‌خواهیم حلال P را تخمین بزنیم و نحوه توزیع مقادیر ویژه این عملگر را با کمک فرمول ویل بررسی نماییم.

واژه‌های کلیدی: عملگر دیفرانسیلی غیرخودالحاق ، طیف عملگر، حلال عملگر

کد رده بندی موضوعی : ۴۷F۰۵

۱. مقدمه

این بخش شامل تعاریف و قضایایی می‌باشد که در بخش های بعدی این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فضای سوبولف $W^{2}_{2,\sin^2 t}(0,1)^l$ یا $W^{2}_{2,\sin^2 t}(0,1)\times\cdots\times W^{2}_{2,\sin^2 t}(0,1) = W^{2}_{2,\sin^2 t}(0,1)^l$ شامل توابع برداری $u(t) = (u_1(t),\cdots,u_l(t))$ بر بازه $(0,1)$ است که با فرم متناهی زیر تعریف شده‌اند:

$$|u|_+ = \left(\int_0^1 \sin^4 t\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2_{C^l} dt + \int_0^1 |u(t)|^2_{C^l} dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

که در این‌جا $\left|\frac{du(t)}{dt}\right|^2_{C^l}$ و $|u(t)|^2_{C^l}$ نرم معمولی در فضای C^l هستند.

تعریف بالا از نرم قبلاً هم استفاده شده است. (مراجعه کنید به [۴] و [۵].)

در ادامه نیاز داریم که دامنه عملگر را به گونه‌ای توسیع دهیم تا این عملگر بسته شود. برای این منظور $D(P)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(P) = \{u \in \dot{\mathcal{H}}_l \cap W^2_{2,loc}(0,1)^l : (\sin^2 t)u' \in H_l \;\;,\;\; \frac{d}{dt}\left((\sin^4 t)q(t)\frac{du(t)}{dt}\right) \in H\}$$

که در این‌جا $\dot{\mathcal{H}}_l$ به معنای بستار $C_0^\infty(0,1)^l$ نسبت به نرم سوبولفی بالاست و

$$W^2_{2,loc}(0,1)^l = W^2_{2,loc}(0,1)\times\cdots W^2_{2,loc}(0,1) \qquad (l \text{ بار})$$

و $W^2_{2,loc}(0,1)$ فضای توابع $u(t)\ (0<t<1)$ است که

$$\sum_{i=0}^{i=2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} |u^{(i)}(t)|^2 dt < \infty \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1).$$

تذکر ۱ : در این مقاله ، ما فرض می‌کنیم $\arg z \in (-\pi,\pi)$ و مقادیر ویژه ماتریس $q(t)$ یعنی $\mu_1(t),\mu_2(t),\cdots,\mu_l(t)$ طوری باشند که $\mu_1(t),\cdots,\mu_v(t) \in \mathbb{R}^+$ و $\mu_{v+1}(t),\cdots,\mu_l(t) \in C\backslash\Phi$.

ما در این مقاله می‌خواهیم علاوه بر تخمین حلال عملگر P یک فرمول مجانبی برای توزیع مقادیر ویژه P در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ پیدا کنیم.

تذکر ۲ : طیف عملگر **p** گسسته است.(به [۴] و [۵] مراجعه شود .)

اگر $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ مقادیر ویژه عملگر P در صفحه مختلط باشند، تابع $N(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(t) = \operatorname{card}\{j : |\lambda_j| \leqslant t\}; \quad t \to \infty.$$

۲. تخمین عملگر دیفرانسیل A در فضای $H = L^2(0,1)$

قضیه ۲.۱ فرض کنید $\Phi \subset C$ یک قطاع با رأس صفر باشد و عملگر P را در این‌جا برابر A تعریف می‌کنیم که به‌جای تابع ماتریس $q(t)$ تابع مختلط مقدار $\mu(t)$ را جایگزین می‌کنیم یعنی:

$$(Au)(t) = -\frac{d}{dt}((\sin^{۴} t)\mu(t)\frac{du(t)}{dt}),\ u(t) \in H = L^{۲}(۰,۱) \qquad (۱)$$

فرض کنید که $\forall t \in [۰,۱]$ و $\mu(t) \in C\backslash\Phi$ و $\mu(t) \in C^{۲}[۰,۱]$ همچنین فرض می‌کنیم که نوسانات $\mu(t)$ در داخل یک زاویه کوچک باشد. مثلاً

$$|\arg\{\mu(t_{۱}) \times \mu(t_{۲})^{-۱}\}| \leqslant \frac{\pi}{۸},\ \ t_{۱},t_{۲} \in [۰,۱] \qquad (۲)$$

در این‌ص ورت وقتی‌که $\lambda \in \Phi$ دارای نرم به اندازه کافی بزرگ باشد، عملگر $(A - \lambda I)^{-۱}$ وجود دارد و در فضای $H = L^{۲}(۰,۱)$ پیوسته است و تخمین‌های زیر معتبر هستند.

$$\|(A - \lambda I)^{-۱}\| \leqslant M_{\Phi}|\lambda|^{-۱} \qquad (۳)$$

$$\|(\sin^{۲}(t))\frac{d}{dt}(A - \lambda I)^{-۱}\| \leqslant M'_{\Phi}|\lambda|^{-\frac{۱}{۲}}. \qquad (۴)$$

در این‌جا M_{Φ} و M'_{Φ} ثابت‌های مثبتی می‌باشند.

اثبات. همان‌طوری که قبلاً هم گفتیم دامنه عملگر را به صورت زیر توسعه می‌دهیم تا این عملگر بسته شود.

$$D(A) = \{v \in \dot{\mathcal{H}} \cap W^{۲}_{۱,loc}(۰,۱) : (\sin^{۲} t)u'(t) \in H,\ \ ((\sin^{۴} t)\mu(t)v'(t))' \in H\}$$

حال فرض کنید عملگر A در شرایط (۱) و (۲) صدق کند. عدد حقیقی $\gamma \in (-\pi,\pi)$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $\lambda \in \Phi$ ثابت $C' > ۰$ وجود دارد که

$$C' < Re\{e^{i\gamma}\mu(t)\},\ \ C'|\lambda| \leqslant -Re\{e^{i\gamma}\lambda\}\ \ t \in [۰,۱] \qquad (۵)$$

اگر از طرفین نامساوی $C' < Re\{e^{i\gamma}\mu(t)\}$ انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$C'\int_{۰}^{۱} \sin^{۴} t|v'(t)|^{۲}dt \leqslant Re\int_{۰}^{۱} e^{i\gamma}\sin^{۴} t\mu(t)|v'(t)|^{۲}dt$$

$$= Re\{e^{i\gamma}\langle Av,v\rangle \qquad (۶)$$

در این‌جا نماد $\langle \cdot,\cdot \rangle$ به ضرب داخلی در فضای هیلبرت H اشاره دارد نامساوی (۶) با توجه به اینکه عملگر A در دامنه داده شده بسته است و با کمک قضیه معروف عملگرهای $m-$قطاعی بدست آمده است. (به [۱] مراجعه شود.)

طرفین نامساوی $C'|\lambda| \leqslant -Re\{e^{i\gamma}\lambda\}$ را در $\int_{۰}^{۱}|v(t)|^{۲}dt = \langle v,v\rangle = \|v\|^{۲} > ۰$ ضرب می کنیم.پس :

$$C'|\lambda|\int_{۰}^{۱}|v(t)|^{۲}dt \leqslant -Re\{e^{i\gamma}\lambda\}\langle v,v\rangle$$

با توجه به نامساوی فوق و نامساوی (۶) و با فرض $C' = \frac{۱}{M}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\int_{۰}^{۱}\sin^{۴} t\,|v'(t)|^{۲}dt + |\lambda|\int_{۰}^{۱}|v(t)|^{۲}dt \leqslant MRe\{e^{i\gamma}\langle Av,v\rangle - e^{i\gamma}\lambda\langle v,v\rangle\}$$

$$= MRe\{e^{i\gamma}\langle(A-\lambda I),v,v\rangle\}$$

$$\leqslant M|e^{i\gamma}|\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

$$= M\|v\|\|(A-\lambda I)v\| \qquad (۷)$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^1 \sin^4 t|v'(t)|^2 dt + |\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \leqslant M\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

با توجه به اینکه $\int_0^1 \sin^4 t|v'(t)|^2 dt$ مقداری مثبت می‌باشد، پس داریم:

$$|\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \leqslant M\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

و در نتیجه،

$$|\lambda|\|v\| \leqslant M\|(A-\lambda I)v\| \qquad (۸)$$

با توجه به نامساوی (۸) نتیجه می‌گیریم عملگر $(A-\lambda I)$ یک به یک است. بنابراین معکوس عملگر $(A-\lambda I)$ بر روی برد $A-\lambda I$ وجود دارد و در نتیجه عملگر $(A-\lambda I)^{-1}$ پیوسته است. حال اگر قرار دهیم $v=(A-\lambda I)^{-1}f$ آن‌گاه از رابطه (۸) نتیجه می‌گیریم:

$$|\lambda|\int_0^1 |(A-\lambda I)^{-1}f|^2 dt \leqslant M\|(A-\lambda I)^{-1}f\|\|(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}f\|$$

پس

$$\begin{aligned}
&|\lambda|\int_0^1 |(A-\lambda I)^{-1}f|^2 dt \leqslant M\|(A-\lambda I)^{-1}f\|\|f\| \\
&\Rightarrow |\lambda|\|(A-\lambda I)^{-1}f\| \leqslant M\|(A-\lambda I)^{-1}f\|^2\|f\|^2 \\
&\Rightarrow |\lambda|\|(A-\lambda I)^{-1}f\| \leqslant M\|f\| \\
&\Rightarrow \left\|\left(A-\lambda I\right)^{-1}f\right\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}\left\|f\right\| \\
&\Rightarrow \|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

که در این‌جا ثابت M بستگی به قطاع Φ دارد. بنابراین ما آن را با M_Φ نشان می‌دهیم.

در ادامه تخمین (۴) را ثابت می‌کنیم. دیدیم که،

$$\int_0^1 (\sin^4 t)\,|v'(t)|^2 dt + |\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \leqslant M\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

پس

$$\int_0^1 (\sin^4 t)\,|v'(t)|^2 dt \leqslant M\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

با فرض $v = (A-\lambda I)^{-1}f$ که $f \in H$ خواهیم داشت:

$$\int_0^1 (\sin^4 t)\,|\tfrac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)|^2 dt \leqslant M\|(A-\lambda I)^{-1}f\|\|(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1}f\|$$
$$\Rightarrow \int_0^1 (\sin^4 t)\,|\tfrac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)|^2 dt \leqslant M\|(A-\lambda I)^{-1}f\|\|f\|$$

پس با توجه به نامساوی (۴) داریم:

$$\int_0^1 (\sin^4 t)\,|\tfrac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f|^2 dt \leqslant M\|(A-\lambda I)^{-1}f\|\|f\| \leqslant MM_\Phi|\lambda|^{-1}\|f\|^2$$

پس

$$\int_0^1 (\sin^4 t)\,|\tfrac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)|^2 dt \leqslant M'_\Phi|\lambda|^{-1}\|f\|^2$$
$$\Rightarrow \|(\sin^2 t)\tfrac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)\| \leqslant M_{\Phi'}|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\|f\|$$
$$\Rightarrow \|(\sin^2 t)\tfrac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant M_{\Phi'}|\lambda|^{-\frac{1}{2}}.$$

۳. تخمین حلال عملگر دیفرانسیل A در $L^2(0,1)$ در حالت کلی

در این بخش فرض اینکه نوسانات $\mu(t)$ کوچک باشند را کنار گذاشته و در حالت کلی به اثبات قضیه ۲.۱ می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱ اگر $(Au)(t) = ((\sin^4 t)\mu(t)u'(t))'$ که $t \in (0,1)$، آن‌گاه به ازای هر $\lambda \in \Phi$ تخمین زیر برای عملگر A برقرار هستند.

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leqslant M_\Phi|\lambda|^{-1} \qquad (۹)$$

در این‌جا ثابت‌های M_Φ و M'_Φ مثبت می‌باشند و $\mu(t) \in C^2[0,1]$ یک تابع مختلط مقدار است و $\mu(t) \in C\backslash\Phi$

اثبات : می توانیم مجموعه برد تابع $\mu(t)$ را به مجموعه هایی افراز کنیم که در هر مجموعه نوسانات این تابع محدود و کوچک باشد و مانند قضیه قبل، اثبات را کامل کنیم.

۴. توزیع مجانبی مقادیر ویژه عملگر P در $H_1 = L^2(0,1)^l$

قضیه ۴.۱ فرض کنید Φ، $q(t)$ و P همان‌هایی باشند که در بخش‌های قبل معرفی کردیم. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ مقادیر ویژه عملگر P باشند و

$$N(T) = \mathrm{card}\{j : |\lambda_j| \leqslant t\}$$

فرمول مجانبی زیر برقرار است.

$$N(t) \sim \Lambda t^{\frac{۱}{۲}} \quad (t \to \infty)$$

که در این‌جا

$$\text{(t) dt}\Lambda = \frac{۱}{\pi}\sum_{j=۱}^{v}\int_{۰}^{۱}(\sin^{-۲} t)\mu_j^{-\frac{۱}{۲}}$$

و $\mu_۱(t), \cdots, \mu_v(t) \in \mathbb{R}^+$ و $\mu_{v+۱}(t), \cdots, \mu_l(t) \in C \backslash \Phi$.

اثبات. می‌دانیم (به مرجع [۸] مراجعه شود) که به ازای هر عملگر کراندار $T_۲$ و هر عملگر هسته دلخواه $T_۱$ داریم:

$$|T_۱T_۲| \leqslant |T_۱|\|T_۲\| \qquad \text{و} \qquad \mathrm{tr}(T_۱T_۲) = \mathrm{tr}(T_۲T_۱).$$

با استفاده از رابطه بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\mathrm{tr}(P - \lambda I)^{-۱} = \sum_{j=۱}^{+\infty}\frac{۱}{\lambda_j - \lambda} = \mathrm{tr}\Gamma(\lambda) + O(۱)\|\Gamma(\lambda)\|_۱\|y(\lambda)\|,$$

و

$$\mathrm{tr}\Gamma(\lambda) = \mathrm{tr}(UB(\lambda)U^{-۱}) = \mathrm{tr}B(\lambda) = \sum_{j=۱}^{l}\mathrm{tr}\left(P_j - \lambda I\right)^{-۱},$$
$$|\Gamma(\lambda)|_۱ \leqslant \|U\|.\|U^{-۱}\|\|B(\lambda)\|_۱ \leqslant M|\lambda|^{-۱} \quad (\lambda \in \Phi, |\lambda| > C).$$

بنابر رابطه آخر می‌بینیم که

$$\sum_{j=۱}^{+\infty}\frac{۱}{\lambda_j - \lambda} = \sum_{j=۱}^{l}\mathrm{tr}\,(P_j - \lambda I)^{-۱} + O(|\lambda|^{-۱}), \quad |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \Phi. \qquad (۱۰)$$

فرض کنید $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots$ و $\lambda_{j,۱}, \lambda_{j,۲}, \cdots$ دنباله مقادیر ویژه عملگرهای P و P_j باشند که ($j = v + ۱, \cdots, l$) با توجه به رابطه (۱۰) داریم:

$$\sum_{j=۱}^{+\infty}\frac{۱}{\lambda_j - \lambda} = \sum_{k=۱}^{l}\sum_{j=۱}^{+\infty}\frac{۱}{\lambda_{j,k} - \lambda} + O(|\lambda|^{-۱}), \quad |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \Phi. \qquad (۱۱)$$

فرض کنیم $\Psi = \{z \in C: |\arg z| \leqslant \psi\}$ که $\psi \in (۰, \phi)$ یک عدد ثابت است. (در بخش اول دیدیم که $\phi \in (۰, \pi)$). ما همچنین می‌توانیم اندیس $j_۰$ را طوری در نظر بگیریم که برای هر $j \geqslant j_۰$ نامساوی زیر برقرار باشد.

$$|\arg\lambda_{j,k}| > \psi, \qquad k = v+1,\cdots,l\,, \quad |\arg\lambda_j| < \psi. \qquad (12)$$

علاوه بر آن $k = v+1,\cdots,l$ و $\lambda_{j,k} \in C\backslash\Phi$ و $\lambda_{j,k} \in \mathbb{R}^+$

پس مطابق این شرایط نتیجه می‌گیریم که برای $j = 1,\cdots,v$ مقدار $\lambda_{j,k}$ عددی مثبت است.

در رابطه (۱۱)، $\sum_{k=1}^{l}$ به $\sum_{k=1}^{v}$ تبدیل می‌شود.

پس داریم:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_j} = \sum_{k=1}^{v}\sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{j,k}-\lambda} + O(|\lambda|^{-1}), \quad |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \partial\Phi.$$

اگر طرفین معادله فوق را در $\frac{1}{\lambda+t}$ $(t>1)$ ضرب کنیم. با استفاده از روش انتگرال کانتور (به مرجع [۴]مراجعه شود) و رابطه (۱۲) با انتگرال‌گیری نسبت به $\lambda \in \partial\psi$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda+\lambda_j} = \sum_{k=1}^{v}\sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{j,k}+\lambda} + O(|\lambda|^{-1}), \quad |\lambda| \to +\infty.$$

(با روش انتگرال‌گیری کانتور علامت منها در مخرج کسر به مثبت تبدیل می‌شود). در این‌جا مقادیر ویژه عملگر P که گسسته بوده، را به ترتیب ناصعودی $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ مرتب کرده‌ایم. پس می‌توانیم سری فوق را به انتگرال زیر تبدیل کنیم.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dN(\tau)}{t+\tau} = \sum_{k=1}^{v}\int_0^{+\infty} \frac{dN_k(\tau)}{t+\tau} + O(t^{-1}), \qquad t \to +\infty. \qquad (13)$$

در این‌جا

$$N(\tau) = \mathrm{card}\{j : |\lambda_j| \leqslant \tau\},$$

و

$$N_k(\tau) = \mathrm{card}\{j : \lambda_{j,k} \leqslant \tau\}, \qquad k = 1,2,\cdots,v.$$

با توجه به توابع $\mu_k(t)$ و مرجع [۱] فرمول زیر برای توابع $N_k(t)$ و $k = 1,\cdots,v$ برقرار است.

$$N_k(\tau) \sim C_k \tau^{\frac{1}{2}}, \qquad \tau \to +\infty.$$

که در آن

$$C_k = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin^{-2}(t)\mu_k^{-\frac{1}{2}}(t)dt.$$

حال با استفاده از رابطه (۱۲) داریم:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dN(\tau)}{t+\tau} \sim \sum_{k=1}^{v} \int_{0}^{\infty} \frac{dN_k(\tau)}{t+\tau}, \qquad t \to +\infty.$$

حال اگر برای رابطه آخر قضیه تاوبرین چند شعاعی اشکالیکوف[1] بکار ببریم، داریم:

$$N(\tau) \sim \sum_{k=1}^{v} N_k(\tau), \qquad t \to +\infty.$$

و

$$N_k(t) \sim C_k t^{\frac{1}{2}}, \qquad C_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \sin^{-2}(t)\mu_k^{-\frac{1}{2}}(t)dt.$$

بنابراین فرمول مجانبی زیر برقرار است.

$$N(t) \sim \Lambda t^{\frac{1}{2}}, \qquad t \to +\infty$$

که

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{v} C_k = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{v} \int_{0}^{1} \sin^{-2}(t)\mu_k^{-\frac{1}{2}}(t)dt.$$

و این اثبات را کامل می‌کند.□

مراجع

[۱] **T.Kato, Perturbation theory for linear operators, *Springer, New York*, (۱۹۹۶).**

[۲] **S.Agmon, Lectures on elliptic boundary value problems, American mathematical society, (۱۹۶۵).**

[۳] **M.S.Agranovich, Elliptic boundary problems, *Springer-Verlage Berlin Heidelberg*, (۱۹۹۷).**

[۴] **A.Sameripour and Seddigh, On the spectral properties of generalized non-selfadjoint**

[1] Shakalikov multiray Tauberian

elliptic systems of differntial operators degenerated on the boundary of domain, *Bull. Iranin Math. Soc*, ۲۴ (۱۹۹۸), ۱۵-۳۲.

[۵] A. Sameripour and Seddigh, Distribution of the eigenvalues non-self-adjoint elliptic systems that degenerated on the boundary of domain, *(Russian). Math. Zametki*, ۶۱ (۱۹۹۷), ۴۶۳-۴۶۷.

[۶] K. Kh. Boimatov and K. Seddigh, On some spectra properties of ordinary differential operators generated by noncoercive forms, *Dokl. Akad. Nauk. Rossyi*, ۱۹۹۶.

[۷] A. Sameripour, Y. Yadollahi, Topics on the spectral properties of degenerate non-self-adjoint differential by operators, *Journal of inequality and applications*, (۲۰۱۶).

[۸] El Maati Ouhabaz, Analysis of heat equations on domains, *published by princeton university press*, (۲۰۰۵).

[۹] Radek Novak, Mathematical analysis of quantum mechanics with non-self- adjoint operators, Doctoral thesis, university of nantes jean leray mathematics institute and czech technical university in prague faculty of nuclear sciences and physical engineeringm, (۲۰۱۸).