مجله رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی

سال سوم، شماره ۸،بهار ۱۳۹۹

ISSN: ۲٦٤٥-٥٤٣۹

www.jonarbset.ir

مروری بر روش های فاصله اطمینان در مدل‌های با ضرایب متغیر

رضا چراغی[۱]، امید فرضی[۲]

[۱] سازمان مدیریت و برنامه ریزی استان کرمانشاه

[۲] گروه آمار دانشگاه رازی

چکیده

مدل های با ضرایب متغیر به دلیل انعطاف پذیری و تفسیرپذیری بالایی که دارند، در دهه های اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته اند. این مدل ها بسط طبیعی مدل های کلاسیک پارامتری هستند که با تفسیر پذیری خوب، محبوبیت زیادی در تجزیه و تحلیل داده ها به دست آورده اند. مدل های با ضرایب متغیر تعمیم یافته که تعمیمی برای مدل های با ضرایب متغیر هستند نیز همانند مدل های با ضرایب متغیر هستند با این تفاوت که با انواع مختلفی از متغیرهای پاسخ مواجه می شویم. به دست آوردن فاصله اطمینان در این مدل ها اهمیت بالایی دارد که روش های مختلفی برای به دست آوردن آن در مدل های با ضرایب متغیر وجود دارد. در این مقاله ضمن بیان روش های مختلف فاصله اطمینان در مدل های با ضرایب متغیر و تعمیم آن ها ، به بررسی مثال عددی با استفاده از نرم افزار R خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: ضرایب متغیر، انعطاف پذیر، ضرایب متغیر تعمیم یافته، فاصله اطمینان

۱. مقدمه

مدل های با ضرایب متغیر نخستین بار توسط کلولند، گروس وشیو(۱۹۹۱) برای بسط برنامه های کاربردی تکنیک های رگرسیون های محلی درحالت ساده و چند گانه مطرح شد.

مدل های با ضریب متغیر ناپارامتری نخستین بار توسط هستی و تیبشیرانی (۱۹۹۳) ارائه شد. این مدل ها یک کلاس از مدل های رگرسیون تعمیم یافته هستند که در آن ضرایب، مجاز به تغییر به عنوان توابع هموار از متغیر های دیگر هستند. به این ترتیب اریبی مدل سازی به طور قابل توجهی می تواند کاهش یابد و مدل ها جذاب تر و تفسیر پذیر تر شوند.

چنین مدل هایی به طور ویژه ای در مطالعات طولی مورد استفاده قرار می گیرند که در آن ها هدف تعیین متغیر های کمکی است که در طول زمان تغییرات پاسخ را تحت تاثیر قرار می دهند. هوور و همکاران (۱۹۹۸)، برامبک و رایس (۱۹۸۸) و فان و ژانگ (۱۹۹۹) در مورد کاربرد های مدل های با ضریب متغیر در داده های طولی پژوهش نمودند.

روش های مختلفی برای ایجاد یک فاصله اطمینان وجود دارد، وو و همکاران (۱۹۹۸) و چیانگ و همکاران (۲۰۰۱) روی فاصله اطمینان نقطه ای برای توابع ضرایب در مدل های با ضرایب متغیر مطالعه انجام دادند. در واقع وو و همکاران (۱۹۹۸) روی فاصله اطمینان بنفرونی تحقیق کردند.

در بخش دوم مدل های با ضرایب متغیر و مدل های با ضرایب متغیر تعمیم یافته را بررسی خواهیم کرد. در بخش سوم روش های مختلف بدستآوردن فاصله اطمینان در این مدل ها خواهیم پرداخت و در نهایت در بخش چهارم با ارائه مثال عددی کاربرد این فاصله اطمینان را بیان می کنیم.

۲. معرفی مدل

مدل های با ضرایب متغیر

فرم های مختلفی برای مدل های با ضرایب متغیر مطرح شده اند که منطقی ترین فرم آن توسط فان و ژانگ [۱] (۱۹۹۹) به صورت زیر مطرح شد:

$$m(U,X) = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\beta}(U) \qquad (۱)$$

که در آن متغیرهای پیشگو، چند متغیره و شامل یک اسکالر U و یک بردار $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$ است.

در برآورد پارامتر مدل، زمانی که ضرایب متغیر باشند نیز مشابه حالت مدل های خطی، از روش کمترین مربعات استفاده می شود، بنابراین در این روش هم تابع کمترین مربعات همراه با یک تابع هسته برای برآورد پارامترها مورد استفاده قرار می گیرد.هدف برآورد پارامترهای $\widehat{\beta_i}(u)$ از $\beta_i(u)$ با مینیمم کردن تابع زیر می باشد:

$$L(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i - X^T a + b(U_i - u_0)]^2 K_h(U_i - u_0) \qquad (۲)$$

که در آن $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$ و $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)^T$ است.همچنین تابع $K(t) = \frac{K(t/h)}{h}$ تابع هسته است. از جمله روش های برآورد پارامتر، روش های ناپارامتری هستند که در آنها، روش استفاده از تابع هسته منطقی تر و دقیق تر از روش های دیگر است.

فان و ژانگ (۱۹۹۹) از هسته اپانیچنیکف و وانگ [۲] (۲۰۰۷) از هسته گوس برای مینیمم کردن تابع (۲) استفاده کردند. در این نوشتارنیز به دلیل محبوبیت هسته اپانیچنیکف از آن در برآورد ضرایب استفاده می شود.

مدل های با ضرایب متغیر تعمیم یافته

مدل های با ضریب متغیر به راحتی می توانند به توزیع های شرطی خانواده نمایی گسترش داده شوند. این مسئله به ما اجازه می دهد که به طور موثر با انواع مختلفی از متغیرهای پاسخ مواجه می شویم. از طریق یک تابع پیوند کانونی $g(.)$، تابع رگرسیون مدل سازی شده به صورت زیر است :

$$g\big(m(U,X)\big) = \theta(U,X) = X^T\beta(U) \qquad (۳)$$

که در آن X متغیر کمکی p و U متغیر کمکی اسکالر است.

(در قسمت مدل های با ضرایب متغیر تعمیم یافته و فاصله اطمینان های آن با استفاده از نماد a ضرایب را نمایش می دهیم.) برای ایجاد روش و نظریه کلی تر، بحث خود را به خانواده نمایی محدود نمی کنیم درعوض فرض می کنیم لگاریتم تابع چگالی شرطی از y داده شده (U, X^T) به صورت $l(m(U,X), y)$ است.

با توجه به فان و ژانگ [۳] (۲۰۰۸) در بین روش های مختلفی که برای برآورد پارامتر وجود دارد، برآورد حداکثر درستنمایی محلی منطقی تر و طبیعی تر به نظر می رسد. برای برآورد تابع ضرایب $\underline{\beta}(.)$ در مدل های با ضرایب متغیر تعمیم یافته برآورد حداکثر درستنمایی محلی می تواند به طور خلاصه به شکل زیر نوشته شود:

$\dot{\beta}(.)$ را با $b(u)$ جایگزین می کنیم. برای هر u داده شده، برآوردگر حداکثر درستنمایی محلی $(\hat{\underline{a}}^T(u), \hat{\underline{b}}^T(u))$ از $(\underline{a}^T(u), \underline{b}^T(u))$ ماکسیمم کننده تابع لگاریتم درستنمایی محلی است .

$$L(a,b) = \sum_{i=1}^{n} l(g^{-1}[X_i^T\{\underline{a} + \underline{b}(U_i - u)\}], y_i)K_h(U_i - u) \qquad (٤)$$

کای و همکاران [۴] (۲۰۰۰) برآوردگر برآورد ماکسیمم درستنمایی محلی مجانباً نرمال برای $\underline{a}(u)$ را ارائه کردند.

قضیه : تحت شرایط نظم در کای وهمکاران (۲۰۰۰)، داریم :

$$({nhf(u)}/{v_0})^{1/2}\{\hat{\underline{a}}(u)-\underline{a}(u)-2^{-1}\mu_2\underline{a}^{(2)}(u)h^2\}\xrightarrow{D}N(0_{p*l},\Sigma)$$

که در آن :

$$\sum=(E[E\left\{\left\{\frac{\sigma^2 l\left(g^{-1}\left(X^T\underline{a}(u)\right),y\right)}{\partial\left(X^T\underline{a}(u)\right)^2}\middle|X,U\right\}\right\}XX^T|U=u])^{-1}$$

از قضیه فوق می توان دید که اریبی $\underline{a}(u)$ همان اریبی است که در مدل های با ضریب متغیر استاندارد داشته ایم.

۳. فاصله اطمینان

در استنباط های ناپارامتری فاصله اطمینان نقطه ای چندان معنی ندارد. چون برای هر تابع نامعلوم $g(.)$ فاصله اطمینان نقطه ای برای $(1-\alpha)$ $(g_1(.),g_2(.))$ است وفقط آن را تضمین می کند.

حال این سوال پیش می آید که اگر فاصله اطمینان نقطه ای در استنباط های ناپارامتری مناسب نیست چه فاصله اطمینانی مناسب است ؟

در ساختن باند های اطمینان برای تابع ضرایب در مدل های با ضریب متغیر، بیشترین چالش و مهم ترین کار، به دست آوردن توزیع حداکثر اختلاف بین تابع ضرایب برآورد شده و تابع ضرایب واقعی است.

فان و ژانگ [۵] (۲۰۰۰) برای ساختن یک فاصله اطمینان برای تابع ضرایب برای مدل های با ضریب متغیرقضیه زیر را ارائه کردند:

قضیه: تحت شرایط نظم در فان و ژانگ (۲۰۰۰) داریم:

$$P((-2logh)^{1/2}(\sup_{u\in[0,1]}\frac{\left|\hat{\beta}_j(u)-\beta_j(u)-\widehat{bias}(\hat{\beta}_j(u)|D)\right|}{\left\{\widehat{var}(\hat{\beta}_j(u)|D)\right\}^{1/2}}-d_{v,n})<x)$$
$$\rightarrow\exp\{-2\exp(-x)\}$$

برای هر j داده شده $j=1,2,\dots,p$ که در آن :

$$d_{v,n}=(-2logh)^{1/2}+\frac{1}{(-2logh)^{1/2}}\log\left\{\frac{1}{4v_0\pi}\int\left(k(\acute{t})\right)^2dt\right\},v_0=\int k^2(t)dt$$

در نتیجه با استفاده از قضیه فوق یک پهنای باند $1-\alpha$ از $\hat{\beta}_j(u)$ به راحتی می تواند به صورت زیر به دست آید :

$\hat{\beta}_j(u) - \widehat{bias}\left(\hat{\beta}_j(u)\middle|D\right) \pm \Delta_{j,\alpha}(u)$

که در آن :

$$\Delta_{j,\alpha}(u) = (d_{v,n} + [\log 2 - \log\{\log(1-\alpha)\}](-2logh)^{1/2})\{\widehat{var}\left(\hat{\beta}_j(u)\middle|D\right)\}^{1/2}$$

برآوردگر $\widehat{bias}\left(\hat{\beta}_j(u)\middle|D\right)$ از اریبی شرطی $\hat{\beta}_j(u)$ و برآوردگر $\widehat{var}\left(\hat{\beta}_j(u)\middle|D\right)$ از واریانس شرطی $\hat{\beta}_j(u)$ می تواند از طریق برآورد معرفی شده نوشته شود. فان و ژانگ (۲۰۰۰) نشان داده اند که این باند های اطمینان کاملاً خوب کار می کنند.

هانگ و همکاران (۲۰۰۲و۲۰۰۴) فواصل اطمینان نقطه ای و باند های اطمینان را براساس رویکرد چندجمله ای اسپلاین و بنفرونی مورد بررسی قرار دادند.

در مدل های با ضرایب متغیر تعمیم یافته ساختن فاصله اطمینان بر اساس توزیع حداکثر اختلاف بین تابع ضریب تخمین زده شده و تابع ضریب واقعی است. توزیع دقیق حداکثر اختلاف دشوار است، اگرچه آن را می توان با استفاده از بوت استرپ فرم رسم شده محاسبه نمود.

با استفاده از ژانگ و پنگ [۶] (۲۰۱۰) این دو رویکرد را مورد بحث قرار می دهیم. بدون از دست رفتن کلیت ، برای ساختن باند اطمینان در بازه [۰،۱] تمرکز می کنیم.

۱) رویکرد مبتنی بر توزیع مجانبی

ساختن فاصله اطمینان بر اساس توزیع مجانبی روشی کاملاً مستقیم است. برای فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای $a_p(.)$ در فاصله [۰،۱] ارائه می شود:

$\hat{a}_p(u) - \widehat{bias}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right) \pm \Delta_\alpha(u)$

که در آن $\widehat{bias}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right)$، p-امین مولفه از $bias\left(\underline{\hat{a}}(u)\middle|D\right)$ است.(یعنی $\widehat{bias}\left(\underline{\hat{a}}(u)\middle|D\right)$ = $2^{-1}h^2\mu_2\underline{\hat{a}}^{(2)}(u)$) و همچنین :

$$\Delta_\alpha(u) = \left(d_{v,n} + [log2 - \log\{-\log(1-\alpha)\}](-2logh)^{-\frac{1}{2}}\right)\{\widehat{var}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right)\}^{\frac{1}{2}}$$

و همچنین $\widehat{var}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right)$ ، p-امین مولفه روی قطر $\widehat{cov}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right)$ بوده است :

$$\widehat{cov}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right) = (\underline{I}_p, \underline{0}_p)\ddot{L}^{-1}(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{b}})\Lambda(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{b}})\ddot{L}^{-1}(\underline{\hat{a}}, \underline{\hat{b}})(\underline{I}_p, \underline{0}_p)^T$$

تفسیر این فاصله اطمینان این است که احتمال منحنی واقعی $a_p(.)$ بین منحنی های

$\hat{a}_p(.) - \widehat{bias}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right) - \Delta_\alpha(u)$ و $\hat{a}_p(.) - \widehat{bias}\left(\underline{\hat{a}}_p(u)\middle|D\right) + \Delta_\alpha(u)$ روی فاصله [۰،۱] برابر $1-\alpha$ است.

۲) روش مبتنی بر بوت استرپ

بوت استرپ یک ابزار بسیار مفید برای استنباط آماری است. نحوه استفاده از آن برای ایجاد فاصله اطمینان برای $a_p(.)$ را شرح می دهیم.

فرض کنید :

$$T = \underset{u\epsilon[0,1]}{sup} \frac{\left|\hat{a}_p(u) - a_p(u)\right|}{\{var(\hat{a}_p(u)|D)\}^{1/2}}$$

که α درصد بالایی T برابر C_α است. اگر هر دو مقدار C_α و $var(\hat{a}_p(u)|D)$ معلوم باشند، فاصله اطمینان $a_p(.)$ روی فاصله [۰،۱] به صورت زیر است :

$$\hat{a}_p(u) \pm \{var(\hat{a}_p(u)|D)\}^{1/2} C_\alpha$$

با این حال C_α و $var(\hat{a}_p(u)|D)$ نامعلوم هستند و آنها را به روش بوت استرپ به دست می آوریم.

فرض کنید برآوردگرهای $\hat{C}_\alpha$ و $var^*(\hat{a}_p(u)|D)$ از C_α و $var(\hat{a}_p(u)|D)$ را داریم.

حال مقادیر $\hat{C}_\alpha$ و $var^*(\hat{a}_p(u)|D)$ را به ترتیب با C_α و $var(\hat{a}_p(u)|D)$ در (۴،۱) که منجر به فاصله اطمینان $1-\alpha$ درصد $a_p(.)$ می شود جایگزین می کنیم:

$$\hat{a}_p(u) \pm \{var(\hat{a}_p(u)|D)\}^{1/2} \hat{C}_\alpha$$

تخمین C_α و $var(\hat{a}_p(u)|D)$ را با بوت استرپ با مراحل زیر انجام می شود.

کل روش بوت استرپ شامل ۵ مرحله است :

۱) برآورد $a(.)$ با استفاده از روش برآورد در بخش قبل . نتیجه برآوردگر را با $\underline{\hat{a}}_p(.)$ می نویسیم.

۲) برای هر i، $i = 1,2,\dots,n$ ، یک عضو نمونه بوت استرپ Y_i^* ایجاد می کنیم بر اساس لگاریتم تابع چگالی شرطی :

$$l[g^{-1}\{\underline{X}_i^T \underline{\hat{a}}(U_i)\}, Y_i]$$

برآورد $a(.)$ را با روش تخمینی پیشنهاد شده در بخش قبل بر اساس نمونه بوت استرپ $(U_i, \underline{X}_i^T, Y_i^*)$ و $i = 1,2,\dots,n$ به دست می آوریم. برآوردگر نتیجه را به صورت $\underline{\hat{a}}^*(.)$ می نویسیم که $\underline{\hat{a}}(.)$ یک جمله از عضو نمونه اولیه بوت استرپ است.

۳) قسمت ۲ برای گرفتن m نمونه بوت استرپ از $\underline{\hat{a}}(.)$ را m بار تکرار می کنیم :

$\underline{\hat{a}}^*(.)$ و $i = 1,2,\dots,m$. برآوردگر $cov^*(\underline{\hat{a}}(.))$ از $cov(\underline{\hat{a}}(.))$ به عنوان نمونه کوواریانس $\underline{\hat{a}}_i(.)$ و $i = 1,2,\dots,m$ است و p–امین عضو روی قطر $cov^*(\underline{\hat{a}}(.))$ برآوردگر $var^*(\hat{a}_p(u)|D)$ است.

۴) قسمت ۲ را M بار برای گرفتن نمونه بوت استرپ با اندازه M برای $\underline{\hat{a}}(.)$ تکرار می کنیم :
$\underline{\hat{a}}_i(.)$ و $i = 1,2,\dots,M$. حال پس از محاسبه داریم :

$$T_i^* = \sup_{u\epsilon D} \frac{\left|\hat{a}_{i,p}^*(u) - \hat{a}_p(u)\right|}{\{var^*(\hat{a}_p(u)|D)\}^{1/2}} \quad , i = 1,2,\dots,M$$

که در آن $\underline{\hat{a}}_{i,p}^*(u)$، p–امین عضو از $\underline{\hat{a}}_i^*(.)$ است.
عبارت T_i^* و $i = 1,2,\dots,M$ ، نمونه بوت استرپ T است.

۵) استفاده از α درصد بالایی T_i^* و $i = 1,2,\dots,M$ ، برای برآورد α درصد بالایی C_α از T .

همگرایی در احتمال در محدوده فاصله اطمینان با استفاده از روش بوت استرپ زمانی که حجم نمونه متوسط باشد ممکن است بهتر از روش مبتنی بر توزیع مجانبی باشد. با این حال محاسبات مربوط به رویکرد بوت استرپ بسیار هزینه بردار تر از روش مبتنی بر توزیع مجانبی است.

۴. نتایج عددی

در این بخش با استفاده از داده های شبیه سازی شده و داده های RV و پکیج tvReg در نرم افزار R به بررسی فاصله اطمینان این داده ها خواهیم پرداخت.

۱) داده های شبیه سازی

مدل معرفی شده در فصل دوم را در نظر بگیرید :

$$Y(t_i) = \underline{\beta}(t_{ij}) x_i(t_{ij})^T + \epsilon_i(t_{ij}) \tag{5}$$

در مدل فوق بردار ضرایب $\underline{\beta}(t) = (\beta_1(t),\dots,\beta_m(t))^T$ یک بردار m بعدی از توابع t هستند و $i = 1,2,\dots,n$ و $j = 1,2,\dots,J$ می باشد.

متغیر اول یک بردار ساده است که عدد های ۱ تا ۵ را به اندازه ۲۰ بار تکرار می کند. متغیر دوم نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی از توزیع بتا است که پارامترهای آن ۴ و ۱ هستند. متغیر های سوم و پنجم نمونه های تصادفی ۱۰۰ تایی از توزیع کای- دو است که به ترتیب دارای ۲ و ۱۰ درجه آزادی هستند. در نهایت متغیر ششم یک دنباله ۱۰۰ تایی است که به ترتیب عدد های ۱ تا ۱۰۰ را به نمایش می گذارد. مولفه t در این جا نقش زمان دارد که در تمامی ضرایب قرار می گیرد و سبب تغییر مقادیر ضرایب می شود. ضرایب اول تا ششم هرکدام ساخته شده از توابعی مثلثاتی هستند و ضریب دوم هم دو برابر زمان به توان دو را به دست خواهد آورد.

از آنجایی که هدف این کار ساختن مدل هایی با ضرایب متغیر است، متغیر های اول و آخر که تنها دنباله ای از اعداد طبیعی هستند عملاً بی اثر بوده و به طور منطقی باید بر مدل تاثیر نداشته باشند.

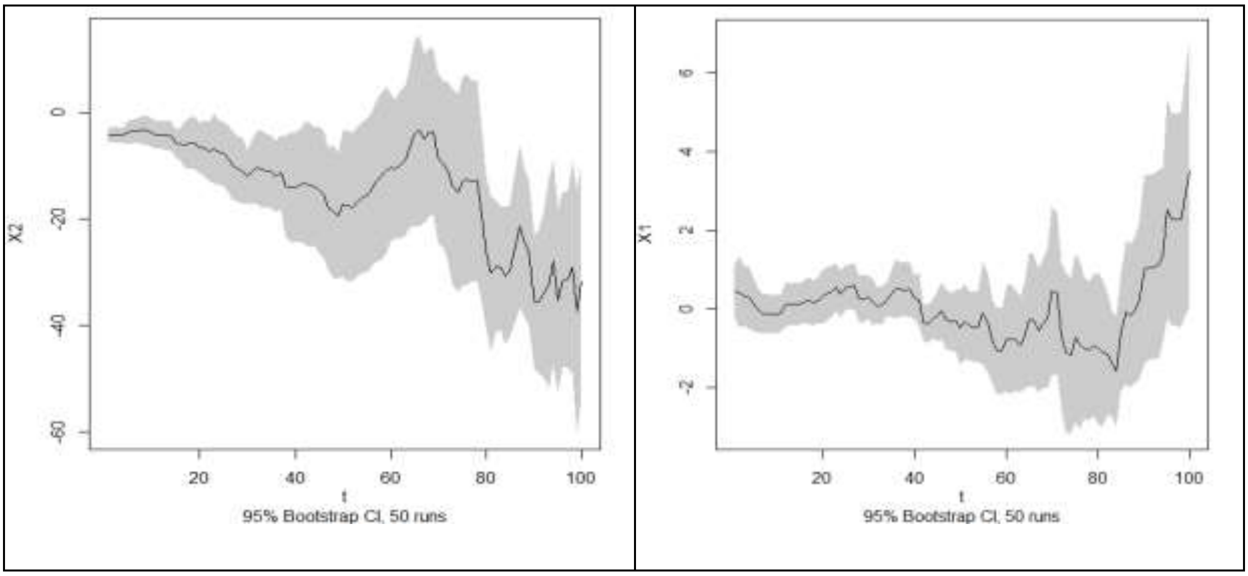
در جدول ۱ میانگین برآورد هر کدام از ضرایب با پهنای باند ۰,۲۹ به صورت جدول زیر به دست آمده است:

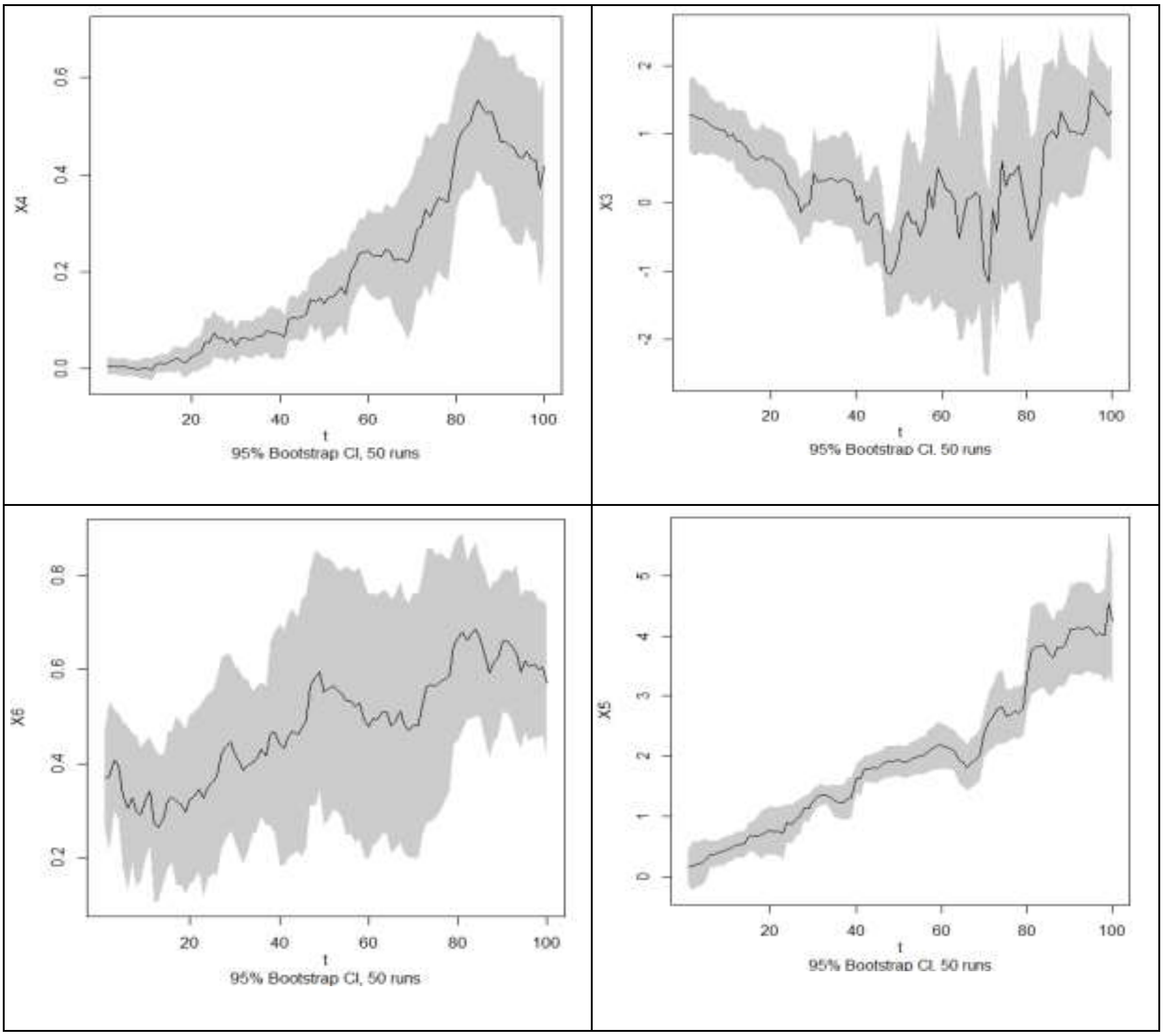
جدول۱: میانگین ضرایب برآورد شده با پهنای باند ۰,۲۹

متغیر	X۱	X۲	X۳	X٤	X٥	X٦
برآورد ضریب	٠,٠٥٠٧٦	-١٤,٢٤٨٦٢	٠,٣٧٢٣٩	٠,١٩٦٩٦	١,٩٨٢٤٣	٠,٤٨٢٥٧

هر کدام از اعداد به دست آمده در جدول فوق میانگین ۱۰۰ برآورد می باشد نشان داده شده است.

هر کدام از متغیرها دارای ۱۰۰ فاصله اطمینان هستند که در نمودار ۱ رسم شده اند. برای مثال اگر اولین فاصله اطمینان متغیر اول را بخواهیم مقدار کران پایین آن برابر ۲,۲۲۵۲۹۳۱۰- و مقدار کران بالای آن برابر ۳,۲۷۲۲۷۸۱۷ خواهد بود، به عبارت دیگر الین فاصله اطمینان متغیر اول به صورت (۳,۲۷۲۲۷۸۱۷ , ۲,۲۲۵۲۹۳۱۰-) است.به همین ترتیب برای ۶ متغیر موجود ، ۶۰۰ فاصله اطمینان وجود دارد. نمودار های آنها با استفاده از ۵۰ بار اجرای روش بوت استرپ و با اطمینان ۰,۹۵ درصد به دست آمده است و تمامی فواصل اطمینان به صورت زیر رسم شده است:





نمودار۱: فاصله اطمینان ۹۵ درصد با ۵۰ اجرا به روش بوت استرپ

هر چه تکرارهای روش بوت استرپ بیشتر باشد دقت فاصله اطمینان های رسم شده نیز بیشتر خواهد شد. مدل های با ضرایب متغیر به خوبی انعطاف مدل را نشان می دهند که این امر سبب جلب توجه پژوهشگران رشته های آمار و حتی رشته هایی مانند اقتصاد، علوم پزشکی، علوم سیاسی و غیره شده است.

۲) داده های RV

داده های RV یک دیتافریم با ۴۵۲۹ ردیف است و متغیر هایی به شرح زیر دارد:

RV : واریانس تحقق یافته روزانه در زمان t

RV_lag : واریانس تحقق یافته روزانه در زمان t-۱

RV_week : میانگین واریانس هفتگی تحقق یافته در زمان t-۱

RV_month : میانگین واریانس ماهانه تحقق یافته در زمان t-۱

RQ_lag_sqrt : ریشه مربع روزانه در زمان t-۱

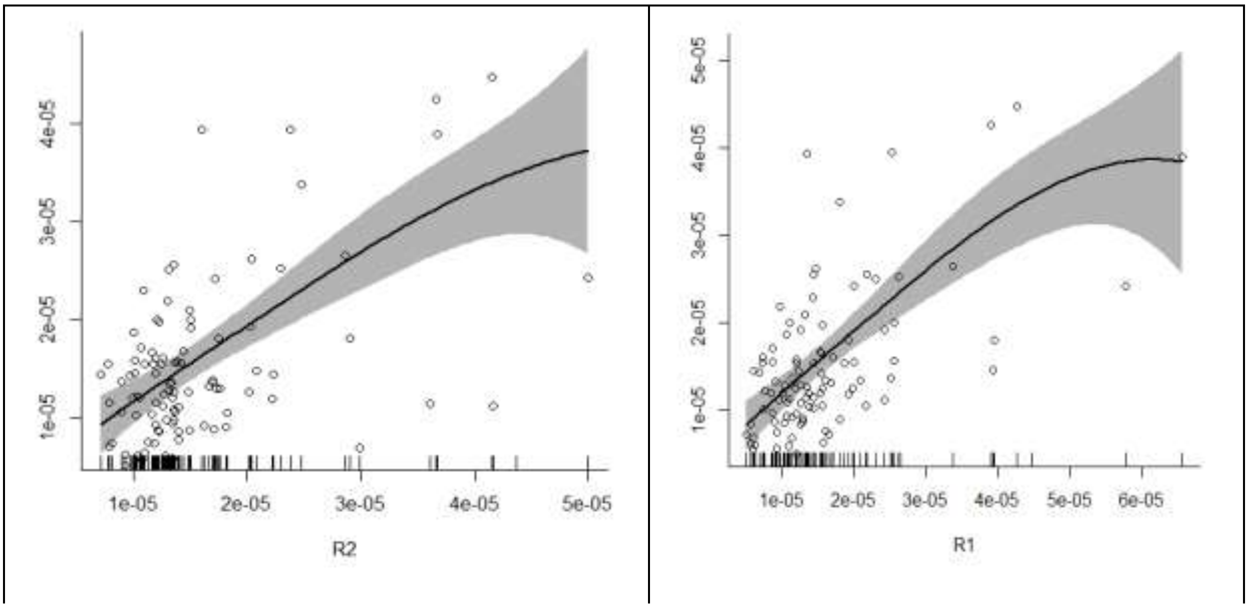
داده های مشابه در مدل های مختلفی به کار رفته که در این جا از داده ها در مدل tvHARQ که توسط کاساس و همکاران (۲۰۰۸) بیان شده است استفاده می کنیم .

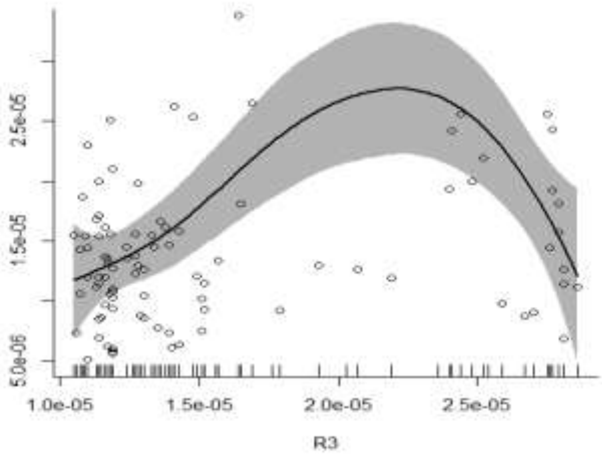
پس از ایجاد مدل در نرم افزار R میانگین برآورد ضرایب به صورت زیر بدست می آید:

جدول۲: میانگین برآورد ضرایب

متغیر	Intercept	R۱	R۲	R۳
برآورد ضریب	۵,۰۲۸e-۰۶	۳,۹۲۵e-۰۱	۳,۸۰۳e-۰۱	-۸,۶۰۹e-۰۲

نمودار متغیر های R۱ ، R۲ و R۳ با استفاده از فاصله اطمینان ۹۵% به شرح زیر می باشد:





نمودار۲: فاصله اطمینان ۹۵ درصد با ۵۰ اجرا به روش بوت استرپ

از نمودار های فوق با استفاده از روش بوت استرپ با ۵۰ اجرا دیده می شود که فاصله اطمینان در این روش ها به راحتی تمام نقاط را پوشش می دهد. همچنین با استفاده از فاصله اطمینان به راحتی می توان در مورد رد یا پذیرش فرضیه های آماری بپردازیم به این صورت که اگر فرض مورد نیاز در فاصله اطمینان مذکور قرار گیرد به این نتیجه می رسیم که فرض رد نخواهد شد در غیر این صورت دلیلی برای رد فرض صفر وجود ندارد.

۵. نتیجه‌گیری

فاصله اطمینان به عنوان معیاری مناسب در تمامی استنباط های آماری مورد استفاده قرار می گیرد که علاوه بر کاربرد خود، می تواند نقش آزمون فرض را نیز ایفا کند به طوری که اگر فرض مورد نظر در فاصله $(1-\alpha)$ قرار داشته باشد دلیلی برای رد فرض مذکور نداریم در غیر این صورت فرض رد خواهد شد. در مدل های معرفی شده نیز روشی هایی وجود دارد که با توجه به هزینه بردار بودن روش بوت استرپ اما دقت بسیار بالایی دارد که این امر سبب شده است که از هزینه بردار بودن این روش چشم پوشی شود.

۶. قدردانی

نویسندگان مقاله از تمامی داوران و هیئت تحریریه محترم کمال تشکر و قدردانی را دارند.

منابع و مراجع

۱. Fan, J., Zhang, W. (۱۹۹۹). Statistical estimation in varying coefficient models. The annals of Statistics, ۲۷(۵), ۱۴۹۱-۱۵۱۸.

۲. Wang. Y, (۲۰۰۷). Varying-Coefficient Models: New Models, Inference Procedures, and Applications.

٣. Fan. J, Zhang . W, (٢٠٠٨). Statistical methods with varying coefficient models. Statistics and its Interface, ١(١), ١٧٩.

٤. Cai, Z., Fan, J., Li, R. (٢٠٠٠). Efficient estimation and inferences for varying-coefficient models. Journal of the American Statistical Association, ٩٥(٤٥١), ٨٨٨-٩٠٢.

٥. Fan, J., Zhang, W. (٢٠٠٠). Simultaneous confidence bands and hypothesis testing in varying-coefficient models. Scandinavian Journal of Statistics, ٢٧(٤), ٧١٥-٧٣١.

٦. Zhang. W , Peng. H, (٢٠١٠). Simultaneous confidence band and hypothesis test in generalised varying-coefficient models. Journal of Multivariate Analysis, ١٠١(٧), ١٦٥٦-١٦٨٠.