فصلنامه رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی
ISSN: ۲٦٤٥-٥٤۳۹
سال پنجم، شماره ۱۶، بهار ۱۴۰۱
www.jonarbset.ir

مسئله همپیوستگی نگاشت و انبساط کمان ها روی درخت های متناهی

پوهنیار محمد اصغر انوری[۱]

[۱] عضو کادر علمی دیپارتمنت ریاضی پوهنحی تعلیم و تربیه پوهنتون بلخ

چکیده

در این پژوهش نشان دادیم که چنانچه X یک درخت متناهی و f یک تابع پیوسته باشد آنگاه تابع همپیوسته است و برای هر n یک تحدید تابع f^n به $\bigcap_{m=۱}^{\infty} f^n[x]$ یک تابع همانی است. همچنین موارد زیر برقرار است:

۱) $Fix(f^n) = \bigcap_{m=۱}^{\infty} f^n[x]$

۲) $Per(f) = \bigcap_{m=۱}^{\infty} f^n[x]$

۳) کمان $A \subseteq X$ برای n عدد طبیعی که $A \subseteq f^n[A]$ وجود ندارد.

و مجموعه نقاط دوره ای f همبند است و به ازای هر ابر فیلتر آزاد u به قسمی موجود است که $f^n: X \to X$ پیوسته است و ابر فیلتر u به قسمی موجود است که $f^n: X \to X$ پیوسته است.

این قضیه تعمیمی بر نتایج بدست آمد توسط ویدال – اسکوبار و گارلیا-فریرا(در حالتی که X برای $۳ \leq k$ یک k-od است) و مکملی برای فعالیت ها و نتایج بدست آمده توسط بروکنر و سدر (در حالتی که X یک کمان است) ورینکان با فرض دندریت بودن X می باشد.

واژه‌های کلیدی: دندریت، انشعابی، الیس، ابر فیلتر، همریختی

مقدمه

یکی از اهداف اصلی مطالعه در سیستم های دینامیک بررسی خانواده تکرارهای یک تابع است. فرض کنید (X,d) یک سیستم دینامیک گسسته باشد آنگاه تکرارهای تابع f حاوی اطلاعاتی در مورد رفتار بلند مدت این سیستم هستند.

تعریف۱- فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $f: X \to X$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه (X,f) را سیستم دینامیکی گسسته می نامیم که به ازای هر $f^n = f^{n-۱} \circ f, n \in N$ و $f^۰$ را به عنوان تابع همانی روی X در نظر میکیریم.
فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. تابع $f: X \to X$ را در نقطه $x \in X$ همپیوسته می نامیم، هرگاه خانواده $\{f^n : n \in N\}$ در X همپیوسته باشد. به این معنا که برای هر $\varepsilon > ۰$ $\delta > ۰$ به قسمی موجود باشد که برای $d(x,y) < \delta, y \in X$ که برای هر $n \in N$ ایجاب میکند $d(f^n(x), f^n(y)) <,$ فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد. تابع $f: X \to X$ را همپیوسته می نامیم هرگاه در هر نقطه از X هم پیوسته باشد.

مجموعه نقاط قطری $X \times X$ را به صورت $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ تعریف کرده و خانواده تمام $\Delta \subset X \times X$ را به D_X نمایش می دهیم.

تعریف ۲: یکنواختی U روی مجموعه X زیر خانواده ای از D_X است که در شرایط زیر صدق میکند:

۱) اگر $V \in \mathrm{U}$ و $V \subset W \in D_X$ آنگاه $W \in \mathrm{U}$
۲) اگر $V_۱, V_۲ \in \mathrm{U}$ آنگاه $V_۱ \cap V_۲ \in \mathrm{U}$
۳) به ازای هر $V \in \mathrm{U}, W \in \mathrm{U}$ به قسمی موجود است که ۲□ $\subset V$
۴) $\cap\ \mathrm{U} = \Delta$

اگر U یک یکنواختی روی مجموعه X باشد آنگاه (X, U) را فضای یکنواخت میگوییم.

تعریف هم پیوستگی (دریک نقطه یا یک فضا) برای هر فضای یکنواخت قابل مشاهده است. با این حال، تمامی فضاهای مورد استفاده در این مطالعه متریک فشرده یا همبند هستند. در ادامه به دو فضای پیوسته اشاره و مسئله را حول آن ها پیش میبریم.

دندریت(فضای پیوسته، موضعا فشرده و عاری از منحنی های بسته ساده) و گراف های چند وجهی در واقع تمرکزمان روی فضای پیوسته است که گاها به صورت دندریت ها و گراف ها هستند. درخت های متناهی نمونه ای از گراف های پیوسته هستند. ساده ترین مثال از درخت های متناهی ، فضایی همریخت با $[۰,۱]$ است که آن را کمان می نامیم. در اوایل دهه نود بروکنر و هو و سپس از آن ها بروکنر و سدر به مطالعه بسیار عمیق و کاملی حول همپیوسته بودن توابع تعریف شده روی کمان ها پرداختند. [۱,۲]

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $f: X \to X$ نیز تابعی دلخواه باشد. آن گاه مجموعه نقاط ثابت X را به صورت $\{x \in X : f(x) = x\}$ تعریف و با $Fix(f)$ نمایش می دهیم. چنانچه برای $x \in X$ ، $n \in N$ به قسمی موجود باشد که $f^n(x) = x$ ، آن گاه x را نقطه دوره ای می نامیم. مجموعه تما نقاط دروه ای از f را با $Per(f)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$Per(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}Fix(f^{n})$$

اکنون فرض کنید X همبند و f پیوست باشد، آن گاه تصویر مجموعه وار $f^m[x]$ نیز همبند است. به علاوه اگر X فشرده باشد آنگاه $f^m[X]$ نیز فشرده است و $\cap_{m=1}^{\infty}f^m[X]$ زیر مجموعه فشرده همبند ناتهی از X است که آن را زیر پیوستارX می نامیم. زیر پیوستار، زیر محموعه ای f- ناوردا است. لذا

$$f[\bigcap_{m=1}^{\infty}f^m[X]]\subseteq\bigcap_{m=1}^{\infty}f^m[X]$$

قضیه ۱– فرض کنید X یک کمان و $f:X\to X$ تابع پیوسته . آنگاه عبارت زیر با یگدیگر هم ارز هستند.

۱) تابع f همپیوسته است.

۲) تحدید $f^{۲}$ به $\cap_{m=1}^{\infty}f^m[X]$ تابع همانی است.

۳) $Fix(f^{۲})=\cap_{m=1}^{\infty}f^m[x]$

٤) مجموعه $Fix(f^{۲})$ همبند است.

عبارت معادل موجود در قضیه فوق بخشی از عبارات معادل در (۳) هستند که پس از بیان چند مفهوم به تعریف آن می پردازیم.

تعریف۳: فرض کنید H کلاسی از زیر فضاهای فشرده $I=[0,1]$ با متر هاسدروف باشد. فرض کنید $f\in(I,I)$ آنگاه به ازای هر $\omega_f:I\to H, x\in I$ را به صورت $\omega_f=\omega(x,f)$ تعریف کرده و آن را مجموعه ω_f –حد x تحت f می نامیم.

بروکنر و سدر $[۱]$پس از مطالعه روابط ω و مجموعه های واجد الشرایط نقطه ثابت ، در نهایت قضیه ای را حول معادل بودن عبارت و شرایطی مختلفی که پس از بررسی بدست آورده بودند. بیان و اثبات کردند.

قضیه ۲: شرایط زیر با یکدیگر معادلند

۱) نگاشت ω_f پیوسته است.

۲) دنباله توابع $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ همپیوسته است.

۳) نگاشت $\omega_{f^{۲}}$ پیوسته است.

۱) $Fix(f^{۲})=\cap_{n=1}^{\infty}f^n[I]$

۵) مجموعه $Fix(f^{۲})$ همبند است و به ازای هرx $\{f^{۲}\}_{n=1}^{\infty}$ به نقطه ای از $Fix(f^{۲})$ همبند است.

۶) مجموعه $Fix(f^{۲})$ همبند است.

تلاش برای تعمیم این نتایج از کمان ها به تمام درختان متناهی کار بیهوده ای است. اما این حال نما های دیگر ویژگی معتبری را ارائه می دهد در روند این تحقیق اثباتی را ارائه میکنیم که برا هر درخت متناهی مانند X و تابع پیوسته $f:X\to X$ همپیوستگی f با هریک از این شرایط معادل است.

نتایج جالب بیشتری از همپیوستگی تابع پیوسته $f: X \to X$ توسط مای در حالتی که X به عنوان یک گراف در نظر گرفته [۳] و توسط رینکان و کامارگو در حالتی که X دندریت در نظر گرفته شده [۴] نشان داده شد.

در سال ۲۰۰۳، مای با فرض اینکه X یک گراف است اثبات کرد که f تابعی همپیوسته است. اگر و تنها اگر $\bigcap_{m=1}^{\infty} f^m[x]$ با مجموعه تمام نقاط بازگشتی برابر است.[۳]

تعریف۴:فرض کنید دنباله اکیدا صعودی $0 < n_1 < \cdots < n_k <$ به قسمی موجود باشد که برای $\lim_{n\to\infty} f^{nk}(x) = x, x \in X$. در اینصورت x یک نقطه بازگشتی است و آن را با $R(f)$ نمایش می دهیم.

گزاره۱: چنانچه $R(f)=X$ آن گاه f را بازگشتی نقطه وار می گوییم.

توجه داشته باشید که تمام نقاط دوره ای بازگشتی هستند اما عکس این عبارت لزوما برقرار نیست.

قضیه۳ : فرض کنید X یک گراف و (X,d) یک فضای متریک و $f: X \to X$ نگاشت همپیوسته باشد . دراین صورت عبارات زیر معادلند.

۱) نگاشت f همپیوسته است.

۲) $R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x)$

۳) تحدید f به $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ هم پیوسته است.

۴) تحدید f به $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ همریختی متناوب یا مزدوج توپولوژیک با دوران گویا از دایره یکتا است.

[۳]

پس از مای، کاماگر در سال ۲۰۱۸ [۴]توانست (با فرض دندریت بودن) ثابت کند همپیوسته است اگر و تنها اگر $\overline{Per(f)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} f^n[I]$ ما نیز حالتی را مورد بررسی قرار میدهیم که یک درخت متناهی باشد و نشان می دهیم در این شرایط ، f همپیوسته است اگر و تنها اگر $Per(f) = \bigcap_{m=1}^{\infty} f^n[x]$.

مفهوم دیگری که در این تحقیق نقش اساسی را ایفا می کند انبساط کمان است. به عنوان مثال فرض کنید $f: R \to R$ تابع ساده پیوسته باشد، F انتقال خطی است. یعنی برای ثابت نامنفی $f(x) = \alpha x, \alpha \in R$ همانطور که مشاهده می شود، fهم پیوسته است اگر و تنها اگر $0 \le \alpha \le 1$ و چنانچه $1 < \alpha$ ، آن گاه به ازای هر $x \in R$ f در x همپیوسته نیست. به طور شهودی توابه انبساطی دهنده خط اعداد حقیقی نمیتوانند همپیوسته باشند. چون برای $1 < \alpha$ ، به ازای هر $I \subseteq f^n[I]$ که $I = [0,1]$ و این منجر به تعریف زیر می شود.

تعریف ۵: فرض کنید (X,f) سیستم دینامیکی گسسته و $I \subseteq X$ زیر فضای همریختی به یک کمان باشد $n \in N$ به قسمی موجود باشد که $I \subseteq f^n[I]$ ، آنگاه I را کمان f- انبساطی می نامیم.

تعریف۶: درختی که فقط دارای یک نقطه انشعابی و برای $k>2$ دارای k نقطه پایانی باشد را k-od می نامیم.

بنابراین اگر f یک انتقال خطی روی R باشد. آن گاه همپیوسته بودن f با فقدان کمان f- انبساطی معادل است، ساده ترین حالتی که در فضای خط اعدا حقیقی رخ میدهند این است که اگر X یک کمان یا k-od باشد، آنگاه تابع پیوسته $f: X \to X$ همپیوسته است اگر و تنها اگر X شامل کمان های f- انبساطی نباشد.

در اینجا زمانی که k عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۳ باشد، درخت متناهی شامل نقطه $v \in X$ (که آن را راسX می نامیم) است ، به قسمی که کمان های $I_1, \dots, I_k$ برای $1 \le i \le j \le k$ در شرط $I_i \cap I_j = \{v\}$ و $X = \cup_{i=1}^{k} I_i$صدق کنند.

در روند کار ، دسته بندی همپیوستگی را از k-od ها به گراف های متناهی دلخواه تعمیم می دهیم. مطالعه شرایط خانواده $\{f^n : n \in N\}$ از تکرار توابع پیوسته ، منجر به ارائه مفاهیم زیر می شود.

تعریف۷: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $f: X \to X$ تابعی پیوسته باشد

۱) نیمگروه الیس از سیستم دینامیک گسسته (X,f) رابا $E(X,f)$ نشان داده و به صورت $E(X,f) = cl_{X^X}(\{f^n : n \in N\})$ تعریف میکنیم که بستار در فضای X^X تمام توابع $f: X \to X$ از خانواده $\{f^n : n \in N\}$ است.

۲) باقی مانده الیس از سیستم دینامیکی (X,f) عبارت اند از :

$$E(X,f)^* = E(X,f)/\{f^n : n \in N\}$$

در حالت اگرX فشرده باشد، بنا به قضیه تیخونوف ، فضای X^X نیز فشرده است. بنابراین فضای $E(X,f)$ نیز فشرده است. $E(X,f)$ با عمل ترکیب یک نیمگروه در واقع نیمگروه فشرده راست توپولوییک (نیمگروهی که تمام انتقال های راست آن پیوسته است) خواهد شد. به علاوه اگر Xیک فضای متریک باشد، انگاه بررسی $E(X,f)$ اطلاعات قابل توجهی درباره سیستم دینامیکی (X,f) ارائه می دهد.

تعریف۴ : فرض کنید R یک مجموعه شمارا باشد، ابر فیلتر p یک خانواده ناتهی از زیر مجموعه های R است هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) Φ عضو pنیست.

۲)اگر و آنگاه

۳) اگر $A \subseteq B$ و $A \in p$ آنگاه $B \in p$

۴) اگر $A \in p$ $A \in p$, آنگاه یا$A \cap B \in p$

شرط دوم به این معنی است که $R \in p$. بنابراین از آخرین ویژگی نتیجه می شود برای هر $A \subset R$، $A \in p$ یا $R/A \in p$.

در حقیقت، با تکرار ویژگی آخر نتیجه می شود که هر افراز متناهی از R ، دقیقا به یکی از بخش های pتعلق دارد.

گزاره۲. ابر فیلتر p روی R یک خانواده از زیر مجموعه های R است به طوریکه برای هر افراز از R دقیقا یکی از بخش های افراز به p تعلق داشته باشد.

ارائه یک مثال مشخص از ابر فیلتر های اصلی کار سختی نیست. برای $\alpha \in R$ خانواده P_αرا به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P_\alpha := \{A \subset R : \alpha \in A\}$$

به راحتی می توان این موضوع را مورد بررسی قرار داد کهP_α در شرایط تعریف صدق میکند.

گزاره۳: ابر فیلترهای به فرم P_αرا اصلی و سایر ابر فیلترها راغیر اصلی می نامیم.

توجه داشته باشد که وجود ابر فیلتر های غیر اصلی فقط با کمک لم زرن ثابت می شود.

گزاره ۴: هر فیلتر مشمول در یک ابر فیلتر است.

برهان: در ابتدا جهت برقراری ترتیب جزئی نشان می دهیم که هر فیلتر ماکسیمال یک ابر فیلتر است. فرض کنید p یک فیلتر ماکسیمال باشد و مجموعه ها ناتهی A و B از R به قسمی موجود باشند که $A \cup B \in p$. حالا باید نشان دهیم که یکی از دو مجموعه A و B بهp تعلق دارند. فرض کنید $B \in p$ نباشد و خانواده p^l را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$p^l := p \cup \{C \subset R: A \subset C\} \cup \{A \cap C: C \in p\}$$

اکنون ادعا میکنیم که p^l یک فیلتر است. آنگاه $p^l = p$ (بنابر ماکسیمال بودن) و بنابراین $A \in p$ فرض کنید Φ عضو p^l نباشد. از آن جایی که p یک فیلتر و مجموعه ناتهی است پس برای $C \in p$ ،

$$A \cap C = \emptyset$$

اما از آنجایی که $A \cup B \in p$ پس باید $(A \cap C) \cap C = \emptyset$ و به طور همزمان عضو p و زیر مجموعه B باشد که تناقض است. شرایط دوم و سوم نیز برای p برقرار است.

اکنون می توان به راحتی بررسی کرد که خانواده زیر مجموعه های مرتب از ابر فیلتر ، یک ابر فیلتر است بنابرانی می توان از لم زرن جهت نشان دادن اینکه هر فیلتر مشمول در یک ابر فیلتر است، استفاده کنیم.

فرض کنید R دارای توپولوژی گسسته باشد، مجموعه تمام ابر فیلتر های روی R رافشرده سازی استون-چخ مشخص می نماید . یک روش به کمک تابع مشخصه ها می باشد. فرض کنید $\Omega := \{۰،۱\}^R$ مجموعه تمام توابع $f: R \to \{۰،۱\}$ باشد . این تابع یک به یک و پوشاست. به ازای هر $A \subseteq R$ می توان Ω را خانواده تمام زیر مجموعه های Rدرنظر بگیریم که$\chi_A \in \Omega$. در ادامه با در نظر گرفتن توپولوژی گسسته روی $\{۰،۱\}$ با توپولوژی حاصلضربی ، بنا به قضیه تیخونوف فضای فشرده است. حال فرض کنید $X = \{0,1\}^\Omega$. هر عضو از Ω با زیر مجموعه ای از R در تناظر یک به یک است. به بیانی دیگر:

$$p = \{A \subseteq R: p(A) = ۱\}$$

یک فیلتر است. آن گاه $p_n(A)$ برابر است با $\{A \subseteq R: p(A) = ۱\}$ که $p_n(A) = p_n(\chi_A)$ لذا $p_n(A)$ فیلتر اصلی است.

لم۱: مجموعه های $\bar{A}$ ، مجموعه ای باز بسته و تشکیل یک پایه برای توپولوژی روی βR می دهند.

برهان: فرض کنید $p \in X$. باتوجه به تعریف $p \in \bar{A}$ اگر و تنها اگر $p(A)=1$. از آنجایی که $\{۱\}$ مجموعه ای باز-بسته از $\{۰و۱\}$ است و با توجه به تعریف توپولوژی حاصلضربی روی X می توانی نتیجه بگیریم که $\bar{A}$ یک مجموعه ای باز-بسته از X است. در نتیجه مقطع آن با βR به ما زیر مجموعه ای باز بسته از βR را میدهد.

برای اینکه نشان دهیم مجموعه های $\{\bar{A}, A \subseteq R\}$ ساختار پایه برای توپولوژی روی R هستند، فرض کنید $A_1, \dots, A_k$ ، $1 \leq r \leq k, k \in N$ زیر مجموعه های R باشند که به بدین وسیله مجموعه C را به صورت زیر تعریف میکنیم

$$C := \{p \in X: A_1, \dots, A_k \in p, A_{r+1}, \dots, A_k\ p\}$$

مجموعه ای با ساختار C ، پایه های توپولوژی X هستند بنابراین مجموعه هایی با ساختار $C \subseteq \beta R$ پایه برای توپولوژی βR هستند. مقطع $B = (\cap_{i=1}^{r} A_i) \cap [\cap_{i=r+1}^{k} (\frac{R}{A_i})]$ را در نظر بگیرید. آنگاه با توجه به شرایط ابر فیلتر، $p \in C \cap \beta R$ اگر و تنها اگر $B \in p$ و بنابراین $C \cap \beta R = \bar{B}$. در واقع باید نشان دهیم

$$\bigcup \bar{A} = \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

فرض کنید مجموعه K یک فضای فشرده هاسدروف و تابع $f:R \to K$ در نظر بگیرید.

باتوجه به اینکه فشرده سازی ستون-چخ است βR، ثابت می شود که همواره یک توسیع پیوسته و منحصر بفرد از βR وجود دارد و با توجه به پیوستگی نتیجه می شود که

$$\beta f(p) = \lim_{n \to p} f(n)$$

و با نماد

$$p - \lim_{n} f(n) := \beta f(p)$$

قضیه ۵: فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و $f:X \to X$ پیوسته باشد. درابنصورت عبارات زیر معادل هستند.

۱) نگاشت f همپیوسته است.
۲) نگاشت f همپیوسته یکنواخت است.
۳) خانواده توابع $E(X,f)$ همپیوسته هستند.
۴) خانواده توابع $E(X,f)$ همپیوسته یکنواخت هستند.

میتوان خانواده توابع $E(X,f)$ را به کمک ابر فیلتر ها مورد بررسی قرار داد که در این صورت $E(X,f)$ برابر با مجموعه تمام f^u هایی است که u یک ابر فیلتر روی N است.

هر عنصر از $E^*(X,f)$ به صورت f^u است که u یک ابر فیلتر غیر اصلی است. با توجه به قضیه فوق ، اگر $f: X \to X$ هم پیوسته باشد(که یک فضای متریک و فشرده است) آن گاه برای هر ابر فیلتر غیر اصلی u ، تابع f^u پیوسته است. عکس این ساختار در حالت کلی برقرار نیست. اما در شرایطی x یک $k\text{-}od$ باشد، رخ می دهد. ویدال سکوبار و گارسیا فریرا در سال ۲۰۱۹ اثبات کردند که اگر X یک $k\text{-}od$ و $f: X \to X$ تابعی پیوسته باشد. آنگاه همپیوسته است اگر و تنها و اگر برای هر ابر فلتر غیر اصلی u ، f^u پیوسته است باشد. در این بخش به بررسی به این موضوع با فرض اینکه X یک درخت متناهی است می پردازیم.[۵]

قضیه۶: فرض کنید (T,f) یک سیستم دینامیکی گسسته باشد که به ازای تعدادی $k\in N$ ، T یک k-od ساده است. در این صورت عبارت زیر معادلند.

الف) نگاشت f همپیوسته است.

ب) عدد طبیعی n و $a,b\epsilon T$ به قسمی موجودند که $[a,b] \nsubseteq f^n \, , b \neq a$

ج) ابر فیلتر غیر اصلی p به قسمی موجود است که f^p پیوسته نیست.

[۵]

قضیه۷: فرض کنید (X,f) یک سیستم دینامیک گسسته باشد که X یک درخت متناهی است. آنگاه هر عنصر $E(X,f)^*$ یا پیوسته است یا ناپیوسته.

قضیه ۸: فرض کنید (X,f) یک سیستم دینامیک گسسته باشد که X یک درخت متناهی است. آنگاه عبارت زیر معادل اند:

۱) تابع f همپیسوته است.

۲) عدد طبیعی n به قسمی موجود است که تحدید f^n به $\bigcap_{n=۱}^{\infty} f^n[X]$ تابع همانی است.

۳) عدد طبیعی n به قسمی موجود است که $Fix(f^n) = \bigcap_{m=۱}^{\infty} f^m[X]$

۴) $Per(f) = \bigcap_{m=۱}^{\infty} f^m[X]$

۵) هیچ کمانی f -انبساطی در X موجود نیست.

۶) برای هر $n \in N$ ، مجموعه $Fix(f^n)$ همبند است.

۷) مجموعه $Per(f)$ همبند است.

۸) به ازای هر ابر فیلتر غیر اصلی u ، تابع f^n پیوسته است.

۹) ابر فیلتر غیر اصلی u ، به قسمی موجود است که تابع f^n پیوسته است.

در ادامه نشان دهیم خواهیم داد که هر هریک از شرایط بیان شده از همپیوستگی ، برای دندریت های رخ می دهد که درخت متناهی نیستند. به ویژه مثال های از دندریت ها و توابع ارائه می دهیم که نشان می دهد هیچ یک از شرایط ذکر شده در قضیه قبل برای دندریت دلخواه معادل با شرط (۱) نیست.

سان نشان داد که اگر (X,f) سیستم دینامیک گسسته باشد که درخت متناهی با n نقطه پایانی است، آن گاه f همپیوسته است. اگر و تنها اگر $Fix(f^{n!}) = \bigcap_{m=۱}^{\infty} f^m[x]$

همپیوستگی و انبساطی کمان ها

دو لم در رابطه با فضاهای متریک دلخواه بیان میکنیم که شامل نکات ارزشمندی در رابطه به عدم پیوستگی توابع است.

لم۲: فرض کنید X یک فضای متریک و $f: X \to X$ تابع پیوسته باشد که در نقطه $x \in X$ هم پیوسته نیست . آن گاه برای هر $n \in N$ ، f نمیتواند در (x) f^n همپیوسته باشد.

برهان: فرض کنید $\varepsilon > \cdot$ ، دنبال نقاط $\{x_k\}_{k\in N}$ و دنباله صعودی $\{n_k\}_{k\in N}$ شاهد عدم همپیوستگی f در x باشند. بدون کاستن از کلیت $n \in N$ را به گونه ای در نظر بگیرید که $n_۱ > n$ ، آنگاه دنباله $\{f^n(n_k)\}_{k\in N}$ (که با توجه به پیوستگی تابع f^n ، به (x) f^nهمگرا است) دنباله صعودی $\{n_k - n\}_{k\in N}$ از اعداد طبیعی و ε شاد عدم همپیوستگی f در (x) f^n هستند.

لم۳: فرض کنید X یک فضای متریک و $f:X \to X$ تابعی پیوسته باشد که در نقطه $x \in X$ هم پیوسته نست. آ نگاه برای هر $\cdot \le i < n.n \in N$ به قسمی موجود است که f^n در $f^i(x)$همپیوسته است.

برهان: فرض کنید $\varepsilon > \cdot$$\{x_k\}_{k\in N}$ و $\{n_k\}_{k\in N}$ شاهد عدم همپیوستگی f در xباشند. بدون کاستن از کلیت، بنا به اصل لانه کبوتری ، فرض کنید که ثابت i در $[\cdot,n)$ به قسمی موجود است که به ازای هر $n \in N$ فرض کنید $\{n_k\} = i(modn)$ m_k به قسمی موجود باشد که $\{n_k\} = nm_k + i$ آنگاه $\{f^i(x_k)\}_{k\in N}$ که همگرا به $f^i(x)$ است، دنباله صعودی $\{m_k\}_{k\in N}$ از اعداد طبیعی و $\varepsilon > \cdot$ شاهد عدم همپیوستگی f^n در $f^i(x)$ هستند.

دندریت ها:

تعریف۹ : فرض کنید X ی ک دندریت باشد.

۱) برای $x \in X$ تعداد مولفه های همبند $X/\{x\}$ را مرتبه x می نامیم.
۲) نقطه $x \in x$ را:

الف) یک نقطه پایانی گویم، هرگاه مرتبه ۱ باشد.

ب) یک نقطعه عادی گوییم هرگاه مرتبه ۲ باشد.

ج) یک نقطه انشعابی گوییم هرگاه حداقل مرتبه ۳ باشد.

۳) برای $k \ge ۳$ یک k-od است هرگاه فقط شامل یک نقطه انشعابی (یک راس از X) از مرتبهk باشد.
۴) مجموعه X یک درخت متناهی است اگر و تنها اگر دادای تعداد متناهی نقاط انشعابی باشد که هر یک از این نقاط مرتبه متناهی هستند.

در فضای توپولوژیک X ، مرتبه نقطه $x \in X$ کمترین عدد اصلی K تعریف میکنیم به قسمی که به ازای هر همسایگی باز U از x همسایگی باز دیگر مانند V به قسمی موجود باشد که $x \in V \subseteq U$ و $|(\delta V)| \le K$(که δV نقاط مرزی از V در X است)

در ادامه کمان را با ۲-odنمایش می دهیم.

لم۴: فرض کنید X یک دندریت و $f:X \to X$ یک تابع پیوسته باشد. فرض کنید $x \in X$ اگر $Y \subseteq X/\{x\}$مولفه ای همبند از $X/\{x\}$ باشد به قسمی که $f(x) \in Y$ انگاه $Y \cap Fix(f) \neq \emptyset$

برهان: میدانیم $cl_X(Y) = Y \cup \{x\}$ زمانی که خود یک دندریت باشد، یک زیر شاخه از X نیز هست. تابع اولین نقطه $r_{cl_X}(x): X \to cl_X(Y)$ در نظر بگیرید. برای y که عضو cl_X نیست داریم: $r_{cl_X(Y)}(y) = x$ چون $cl_X(Y)$ دندریت است، لذا دارای شرایط نقطه ثابت است. بنابراین تابع پیوسته $r_{cl_X(Y)} \circ f: cl_X(Y) \to cl_X(Y)$ دارای نقطه ثابت y است.

در نتیجه: $f(y)=y$

توابع پوشا روی درخت های نامتناهی

در این قسمت به مطالعه درختان متناهی و اثبات چهار قضیه اصلی تحت شرایط (توابع همپیوسته پوشا) می پردازیم:

تعریف۱۰: فرض کنید X یک دندریت و $f:X \to X$ تابعی همپیوسته باشد. $\Omega(X,f)$ مجموعه تمام نقاط $y \in X$ است به قسمی که دنباله $\{x_i\}_{i\in N}$ همگرا به $y \in X$ و دنباله $\{n_i\}_{i\in N}$ صعودی از اعداد طبیعی به قسمی موجود باشد که $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_i) = y$.

قضیه ۹: فرض کنید X یک دندریت و $f:X \to X$ یک نگاشت باشد. آنگاه عبارات زیر معادلند.

۱. w_f پیوسته است و $\overline{Per}(f) = \bigcap_{n\in N} f^n$

۲. برای هر $x \in X$ ، $\omega(x,f) = \Omega(x,f)$

۳. نگاشت f همپیوسته است.

[۵]

قضیه ۱۰: فرض کنید X یک دندریت و $f:X \to X$ یک نگاشت باشد . چنانچه $Per(f)=X$ آنگاه f تابعی همپیوسته است.

برهان: کافی است نشان دهیم برای هر $x \in X$ ، $\omega(X,f) = \Omega(x,f)$.

فرض کنیم برای $x \in X$ $\Omega(x,f)/\omega(X,f) \neq \Phi$. اگر $y \in \Omega(x,f)/\omega(X,f)$ ، آن گاه در X و دنباله صعودی $\{k_n\}_{n\in N}$ در قسمی موجود است که $\lim_{i\to\infty} f^{k_n}(x_n) = y$ $\lim_{i\to\infty}(x_n) = X$,

از آن جایی که $x \in Per\ (f)$ پس به ازای $m \in N$

$$\omega(X,f) = O(x,f) = \{x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)\}$$

به ازای هر $n \in N$ $k_n \equiv \cup 1 (mod\ m)$ با توجه به $c \in (f(x), y)$ چون X دندریت می باشد پس به قسمی موجود است $n_0 \in N$ که برای هر $n \geq n_0$ $c \in [f(x), f^{k_n}(x_n)]$.

به خاطر داشته باشید که $[f(x), f^{k_{n0}}(x_{n0})] \subseteq f^{k_{n0}}([x, x_{n0}])$.

لذا $z_0 \in [x, x_{n0}]$ به قسمی موجود است که $f^{k_{n0}}(z_0) = c$ با توجه به $z_0 \neq x$, $n_1 \geq n_0$ به قسمی $z_0 \in [x, x_{n1}]$ که اکنون به دلیل اینکه $[f(x), f^{k_{n1}}(x_{n1})] \subseteq f^{k_{n1}}([x, x_{n1}])$ لذا $z_1 \in [x, x_{n1}]$ به قسمی موجود است که $f^{k_{n1}}(z_1) = c$ با استفاده از استقرا به مجموعه نامتناهی $[z_i : i \in N]$ به قسمی که برای هر $c \in O(z_i, f), i \in N$ این یک تناقض است.

نتیجه : فرض کنید (X, d) یک فضای متریکی فشرده و $f:X \to X$ نگاشت پوشا از خانواده توابع همپیوسته $\{f^n\}$باشد. آنگاه f همریختی است.

فرض کنید $f:I \to I$ تابعی پیوسته باشد که $I=[u,v]$ در این صورت کلاس های B و Aاز توابع را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$A=\{f: I\to I: Fix\,(f) = [a,b]. a \leq b\} \quad B = \{f: I \to I: Fix(f) = Per(f)\}$$

هر زیر مجموعه $A \cup B$ را C^{II} و هر تابع که عناصرش در C^{II} جابه جایی است را h بگیرید. در اینصورت چنانچه $C=C^{II} \cup \{h\}$ آن گاه C^{II} را H-کلاس می نامند. گانو در سال ۱۹۸۲ قضیه زیر را بیان و اثبات نمود.

قضیه ۱۱: فرض کنید f تابعی باشد که تکرارهای آن یک خانواده همپیسوته تشکیل می دهند.

۱) $f \in A$

۲) هرگاه $Fix(f)$ ناتبهگن باشد، آنگاه $f \in B$.

برهان اگر $Fix(f)$ تک نقطه ای باشد . آنگاه حکم ثابت است. لذا فرض کنید $a, b \in Fix(f)$ به قسمی وجود دارند که $a < b$ و به ازای هر $x \in a < b$. آنگاه $x < f(x)$ یا $f(x) < x$. فرض کنید به ازای هر $x \in (a,b)$, $x < f(x)$ (در حالت $f(x) < x$ نیز شرایط اثبات مشابه است). دراینصورت دوحالت داریم:

۱) به ازای هر $x \in (a,b)$, $f(x) < b$

۲) عنصر x از (a,b) به قسمی موجود باشد که $b \leq f(x) \in x \in (a,b)$

حالت ۱) به ازای هر $\to b, x \in (a,b)$ $\{f^n(x)\}_{n=\text{۰}}^{\infty}$ و به ازای هر $x \in N$ $\{f^n\}$ نمیتواند در a همپیوسته باشد.

حالت ۲) فرض کنید z کوچکترنی نقطه در (a,b) باشد که $F(z)=b$ ، در این صورت $\{x_n\}$ در $(a,z]$ به قسمی موجود است که $x_n = z, \{x_\text{۰}\} \to a$, $=x_{n-\text{۱}}$ $f(x_n)$ بنابراین به ازای هر $n \in N$ $f^n(x_n) = b$ و خانواده $\{f^n\}$ نیز نمیتواند همپیوسته باشد که با عبارت (۱) همین قضیه در تناقض است.

برای اثبات دومین عبارت فرض کنید $Fix(f)$ که $a>b$ فرض کنید برای $n \in N$ و $x \in [u,a)$ ، به قسمی موجودند که $f^n(x\,) = x$ با استفاده از عبارت (۱) برای تابع f^n به ازای هر $f^n(y) = y, y \in [x,a]$ اما از آنجایی که به ازای هر $f(a) = a\,, y < f(y), y \in [u,a)$ می توان $y \in (x,a)$را به اندازه کافی نزدیک به a در نظر گرفت که برای تعداد $m\leq n$ یکی از دو حالت زیر رخ دهد.

$$y < f^n(y) < a$$

یا

$$y < f^m(y) \in [a,b]$$

در نتیجه $y < f^n(y)$ که تناقض است.

قضیه ۱۲: فرض کنید X یک درخت متناهی و $f:X \to X$ تابع پیوسته باشد آنگاه عبارات زیر با یکدیگر معادلند.

الف) تابع f همپیوسته است.

ب)برای تعدادی $n \in N$ f^n تابع همانی روی X است.

ج) عدد طبیعی n به قسمی موجود است که $Fix(f^n) = X$

د) $Per(f)=X$

برهان ب)← ج) ←د) قابل مشاهده است.

ج) ← الف: شرایط فوق نه تنها بر روی درختان متناهی ، بلکه بر روی هر دندریت با هر تابع پیوسته f برقرار است.

الف) ب) چنان چه f تابعی پوشا و همپیوسته باشد، انگاه باید همریختی از X به X نیز بوده و مرتبه نقاط سخت همریختی ها حفظ شود.

چون اگر $E(X)$ مجموعه تمام نقاط پایانی $B(X)$ و مجموعه تمام نقاط انشعابی باشد آنگاه

$$F[E(X)]=E(X) \quad , \quad F[B(X)]=B(X)$$

به علاوه یک نقطه انشعابی در کمان xy وجود دارد که تحت f حفظ می شود.

تمام این اطلاعات به این معنی است که اگر با فرض $V = E(X) \cup B(X)$ گراف $G=(V,E)$ را تعریف کنیم، برای $v,w \in V$ و v,w مجاور هستند اگر و تنها اگر هیچ نقطه ای انشعابی در $vw/\{vw\}$ وجود نداشته باشد. آن گاه تحدید f به v باید اتومورفیسم از گراف G باشد. مخصوصا زمانی که V مجموعه ای متناهی است، عدد طبیعی ! $n \leq |V|$ به قسمی موجود است که n امین اثر تابع f تحدید شده به Vتابع همانی بر V است. چون تابع همریختی $f:X \to X$ هر نقطه از $E(X) \cup B(X)$ را ثابت میکند. هرگاه $v,w \in E(X) \cup B(X) = V$ به قسمی که v,w در گراف G مجاور باشند. آنگاه $vw = f^n(v)f^n(w) \subseteq f^n[v,w]$ که f^n تناظر یک به یک است وبرای تمام جفت مجاور V شرایط برقرار است. به عبارتی برای هر $v,w \in V$ که در G مجاورند چون $vw = f^n[v,w]$ تابعی همپیوسته و روی کمان است . لذا $Fix(f^n{}_{vw})$ نیز مجموعه ای همبند است . از انجایی که برای تمامی v و w در G برقرار اس لذا f^n تابع همانی برای کل X است.

کمان های انبساطی حاصل از عدم همپیوستگی

عدم همپیوستگی تابع روی درخت نامتنهای بر وجود کمان های انبساطی دلالت دارد.

لم۵: فرض کنید $f:X \to X$ تابعی پیوسته و ناهمپیوسته باشد. اگر Xکمان یا برای $3 \leq k$ یک k-od باشد آنگاه X شامل یک کمان f-انبساطی است.

برهان: اگر X یک کمان آنگاه $I = \bigcap_{m=1}^{\infty} f^n[x]$ از ان جایی که f ناهمپیوسته است. مجموعه ناهمبند است به ویژه اگر دو نقطه داشته باشد چون $Fix(f^2) \subseteq I$ می توان ادعا کرد که I ناتبهگن و یک کمان است . اکنون تابع f روی کمان I پوشا ولی همپیوسته نیست. چون $Fix((f)^2) = Fix(f^2)$ که مجموعه ناهمبند است لذا کمان f- انبساطی در X به قسمی موجود است که گاهی اوقات کمان انبساطی روی X است.

منابع

۱. J. Camargo, M. Rincon and C. Uzcategui, Equicontinuity of maps on dendrites. Chaos, Solitons and Fractals 126 (2019), 1-6.

۲. J.-H. Mai The structure of equicontinuous maps. Trans. Amer. Math. Soc. 355 no. 10 (2003), 4125-4136.

۳. M. Bruckner and J. Ceder, Chaos in terms of the map x —> co(x,f). Pacific J. Math. ۱۵۶ □□. ۱ (۱۹۹۲), ۶۳-۹۶.

۴. M. Bruckner and T. Hu, Equicontinuity of iterates of an interval map.Tamkang Journal of Mathematics 21 no. 3 (1990), 287-294.

۵. Vidal-Escobar and S. Garcia-Ferreira, About the Ellis semigroup of a simple k-od. Top. Appl. 265 (2019), 106756.

The problem of the coherence of mapping and the expansion of arcs on finite trees

Abstract

In this study we showed that if X is a finite tree and f is a continuous function, Then the function is connected and for every n a limitation of the function f^n to $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n[x]$ is an identical function. The following is also true:

۱. $Fix(f^n)=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n[x]$

۲. $Per(f)=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n[x]$

۳. Arc $A\subseteq X$ for n natural numbers where $A\subseteq f^n[A]$ does not exist.

And the set of periodic points f is connected, and for each free super filter u is available in a form that is $f:X\to X$ connected. And the u filter is available in a way that is $f^n:X\to X$ connected.

This theorem generalizes the results obtained by Vidal-Escobar and Garlia-Ferreira (in which case x is a k-od for 3≤k) and complements the activities and results obtained by Bruckner and Cedar (where x is an arc). Verinkan assuming x is dendritic.

Keyword: DENDRITE, BRANCH, ALICE, SUPER FILTER, HOMEROMOTION