فصلنامه رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی
سال چهارم، شماره ۱۳،تابستان ۱۴۰۰
ISSN: ٢٦٤٥-٥٤٣٩
www.jonarbset.ir

حلال عملگرهای دیفرانسیلی غیرخودالحاق

رضا علی زاده[1] ، مصطفی حیدری طیب [2]

[1] دانشجوی دکتری آنالیز ریاضی دانشگاه لرستان، مدرس دانشگاه و دبیر ریاضی شهرستان دلفان(نویسنده مسئول)
[2] مصطفی حیدری طیب ، مدرس دانشگاه و دبیر ریاضی دلفان ، آموزش و پرورش دلفان، دبیرستان ابوریحان بیرونی

چکیده

هدف این مقاله ، مطالعه حلال عملگرهای دیفرانسیلی غیرخودالحاق است. اصولا عملگرهای دیفرانسیلی از عملگرهای بسیار مهم و کاربردی در آنالیز ریاضی است. عملگرهای شرودینگر، لیوویل - اشتورم و عملگر لاپلاس مثال های مهمی از عملگرهای دیفرانسیلی هستند. این دسته از عملگرها همیشه مورد توجه فیزیک دان ها قرار گرفته اند. اما وقتی ااین عملگرهای دیفرانسیلی، از نوع غیر خودالحاق هستند، ما دچار کمبود تکنیک های ریاضی می شویم. مطالعات بسیار گسترده و ارزشمند و تکنیکی فراوانی در این حیطه انجام گرفته است ولی بخاطر نبود نظریه طیفی کلی در این زمینه، ما دچار مشکل می شویم. اصولا طیف عملگرهای دیفرانسیلی غیرخودالحاق و بخصوص نوع بیضوی آنها بسیار ناپایدار است و حلال این نوع عملگرها غیرقابل پیش بینی است. ما در این مقاله یک دسته از این عملگرها را مطالعه می کنیم.

واژه‌های کلیدی: عملگر دیفرانسیلی غیرخودالحاق، طیف عملگر، حلال عملگر، برد عددی

مقدمه:

یکی از مشکلات اساسی در کوانتوم در هنگام برخورد با عملگرهای غیر خودالحاق فقدان تکنیک های ریاضی برای مطالعه این عملگرهاست. کاربرد این عملگر در کوانتوم به خیلی دور بر می گردد . اولین بار اسم عملگرهای غیرخودالحاق حدود صد سال پیش در کارهای جی. دی. بیرکهاف آمده است، البته مطابق معمول، ابتدا این ایده ها زیاد مورد استقبال قرار نگرفت. حدود چهل سال بعد یک سری نتایج محض توسط کلدی در سال ۱۹۵۱ ارائه شد. به مرور زمان نظریه عملگرهای دیفرانسیل غیرخودالحاق شکل گرفت. قبل از آن کارهای زیادی در ارتباط با عملگرهای خودالحاق انجام گرفته بود، از جمله نظریه طیفی این عملگرها. ولی این نتایج، قابل استفاده برای عملگرهای غیرخودالحاق نبود. عموما طیف عملگرهای غیرخودالحاق دارای ثبات کافی نیست و حلال این عملگرها غیر قابل پیش بینی است. یافتن نظریه طیفی واحد برای این عملگرها کار غیر ممکنی به نظر می رسد. در عمل ایده عملگرهای غیر خودالحاق در سال ۱۹۹۲در فیزیک توسط اف.جی-شولتز اچ. بی .گایر و اف. جی. دبلیو. هانه مطرح شد. آنها مشاهده کردند که می توان یک کوانتوم سازگار ساخت که بر پایه عملگرهای غیرخودالحاق است. هدف این رساله، مطالعه یک دسته از عملگرهای دیفرانسیلی بیضوی غیر خودالحاق در یک فضای هیلبرت است. (به مرجع [۱۵] مراجعه کنید.)

در این مقاله عملگر دیفرانسیلی غیرخودالحاق $Au(t)=-\left(e^{2\alpha t}\mu(t)u'(t)\right)'$ در فضای هیلبرت $H=L^{2}(0,1)$ را با شرایط مرزی دیریکله ، در نظر می گیریم که $0\leq\alpha<1$ و μ یک تابع مختلط مقدار است و $\mu\in C^{2}[0,1]$ و برد تابع μ در زاویه $\Phi_{\theta_1\theta_2}=\left\{z\in\mathbf{C}:\frac{\pi}{2}<\theta_1\leq|\arg z|\leq\theta_2<\pi\right\}$ قرار دارد. در این مقاله می خواهیم درباره حلال این عملگر و خواص طیفی آن مطالعه کنیم. (مقالات [۱۳],[۱۲],[۱۱],[۱۰] را ملاحظه کنید.)

مشکل اصلی این عملگرها این است که دامنه تعریف آنها بسته نیست. ما دامنه این عملگر را در فضاهای سوبولف به یک دامنه بسته توسیع می دهیم و بعد با کمک قضیه نمایش از آن یک عملگر قطاعی می سازیم و بعد حلال آن را مطالعه می کنیم.

پیش نیاز ها

تعریف ۱ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت و T یک عملگر خطی در این فضا باشد. برد عددی T به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{W}(\mathrm{T})=\{\langle Tx,x\rangle : x\in D(T),\ \|x\|=1\}$$

در این جا ، $\langle , \rangle$ نماد ضرب داخلی است.

قضیه۲ (قضیه هاوسدروف) برد عددی یک عملگر خطی ، یک مجموعه ی محدب است.

تذکر۳ : در حالت کلی ، برد عددی نه باز است و نه بسته، حتی اگر عملگر مورد نظر ما ، یک عملگر بسته باشد.

تذکر۴ : $\Delta=\overline{W(T)}^{C}$ یک مجموعه ی باز محدب است ، بجز حالتی که در آن $\overline{W(T)}$ ناحیه محدود شده به دو خط موازی باشد.

مثال۵ : فرض کنید عملگر T بر فضای هیلبرت $\mathbf{C}^2$ با استفاده از ماتریس $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}$ تعریف شده است . برد عددی این عملگر را بیابید.

حل : در این جا فضای هیلبرت ، بر میدان اعداد مختلط تعریف شده است و همین امر باعث می شود که برای یافتن برد عددی این عملگر راه حل متفاوت تری در نظر گرفته شود. هر بردار یکه جون X در فضای هیلبرت $\mathbf{C}^2$ را می توانیم بفرم زیر نمایش دهیم.

$X=((\cos\alpha)e^{i\theta_1},(\sin\alpha)e^{i\theta_2})'$ که در این جا علامت پریم به معنای ترانهاده در نظر گرفته شده است.داریم :

$\|X\|^2=\left|(\cos\alpha)e^{i\theta_1}\right|^2+\left|\sin\alpha)e^{i\theta_2}\right|^2=1$ و

$\langle TX\ ,X\rangle=TX\ .\overline{X}=(\sin\alpha\cos\alpha)e^{i(\theta_2-\theta_2)}=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha)e^{i(\theta_2-\theta_2)}$ و لذا با تغییر α داریم :

$W\ (T)=\left\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\leq\frac{۱}{۲}\right\}$.

در ادامه کار مثالی از برد عددی عملگر انتقال را بررسی می کنیم.

مثال۶ : برد عددی عملگر $T\ (\dots,x_{-۲},x_{-۱},x_{۰},x_{۱},x_{۲},x_{۳},\dots)=(\dots,x_{-۱},x_{۰},x_{۱},x_{۲},x_{۳},x_{۴},\dots)$ در فضای $l^{۲}(\mathbf{Z})$ برابر $W\ (T)=\{z\in C:|z|<۱\}$ است.

حل : اگر $x=\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}\in l^{۲}(\mathbf{Z}),\|x\|=۱$ آنگاه $\langle Tx,x\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\overline{x_{n+۱}}$ پس $|\langle Tx,x\rangle|\leq ۱$.حال اگر $۰\leq r<۱$; $z=re^{i\theta}$ و $\alpha=(\dots,۰,۰,۰,\sqrt{۱-r^{۲}}\ ,r\sqrt{۱-r^{۲}}e^{-i\theta},r^{۲}\sqrt{۱-r^{۲}}e^{-۲i\theta},\dots),\theta\in[۰,۲\pi)$ داریم :

$\langle T\alpha,\alpha\rangle=r(۱-r^{۲})e^{i\theta}+r^{۳}(۱-r^{۲})e^{i\theta}+r^{۵}(۱-r^{۲})e^{i\theta}+\dots=z$ پس $z\in W\ (T)$ در نهایت توجه کنید که در نامساوی $\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\overline{x_{n+۱}}\right|\leq\frac{۱}{۲}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x_n^{۲}+x_{n+۱}^{۲})$ تساوی امکان پذیر نیست پس $W\ (T)=\{z\in C:|z|<۱\}$.

برد عددی دارای خواص زیادی است که در قضیه بعدی تعدای از آنها را یادآوری می کنیم.

قضیه۷ : هرگاه T عملگری خطی بر فضای هیلبرت H باشند آنگاه

۱) هر مقدار ویژه از عملگر خطی T عضو $\overline{W(T)}$ است.
۲) اگر عملگر Tکراندار باشد برد عددی T مشمول در گوی $\{z\in\mathbf{C}:|z|\leq\|T\|\}$ است.

۳) $\overline{W(T)}$ شامل طیف عملگر T است.(برای عملگرهای بیکران رابطه ی بین طیف عملگر و برد عددی قدری پیچیده است اما برای عملگر های بسته ، طیف اساسی همیشه زیرمجموعه ی $\overline{W(T)}$ است.)

۴) اگر T عملگر کرانداری باشد، آنگاه $W(T)=W(T^*)$.

۵) اگر α,β دو عدد مختلط باشند و عملگر T، کراندار باشد آنگاه $W(\alpha T+\beta I)=\alpha W(T)+\beta$.

۶) اگر فضای هیلبرت H با بعد متناهی باشد آنگاه، برد عددی T فشرده است.

۷) برد عددی T حقیقی است اگر و تنها اگر T عملگری خودالحاق باشد.

برهان : برای دیدن برهان می توانید مرجع [۱] را ملاحظه کنید.

قضیه ۸ : فرض کنید که عملگر بسته ی T در فضای هیلبرت H تعریف شده است.اگر عدد مختلط $z\notin\overline{W(T)}$ آنگاه عملگر $T-z$ دوسویی است .

قضیه ۹ : فرض کنید که $T\in M_2(\mathbf{C})$

۱) اگر به ازای عدد مختلط λ داشته باشیم $T=\lambda I$ آنگاه $W(T)=\{\lambda\}$

۲) اگر λ_1,λ_2 مقادیر ویژه عملگر T باشند و $\lambda_1=\lambda_2$ و T مضربی از عملگر همانی نباشد آنگاه W (T) یک گوی بسته نابدیهی حول مقادیر ویژه T است.

۳) اگر مقادیر ویژه T نابرابر با شند آنگاه W (T) یک گوی بیضوی با کانون های در دو مقدار ویژه عملگر T هستند .

در ادامه برد عددی ماتریس های متقارن دو در دو را پیدا می کنیم.

فرض کنید که $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}$. اگر $X=\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}, \|x\|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ در این صورت برد عددی A را به صورت زیر پیدا می کنیم.

$$\langle AX,X\rangle=ax^2+cy^2+2bxy$$

$$W(A)=[\min\{a,c\}-|b|\ ,\ \max\{a,c\}+|b|]$$

فرض کنید که H یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد و T یک عملگر خطی در H باشد.همان طور که می دانیم ،نرم این عملگر یعنی $\|T\|$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|T\|=\sup_{x\in D(T),x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in D(T),\|x\|\le 1}\|Tx\|$$

هرگاه $\|T\|$ متناهی باشد می گوییم عملگر T کراندار است.

جبر همه ی عملگرهای خطی کراندار بر H را با $B(H)$ نشان می دهیم . $C(H)$ مجموعه ی همه ی عملگرهای خطی بسته در H است.

تعریف ۱۰

ویژه مقدار: فرض کنید که $T:H\to H$ یک عملگر خطی است . می گوییم $z\in C$ یک ویژه مقدار برای عملگر خطی T است هرگاه بردار غیر صفر $h\in H$ وجود داشته باشد که $Th=zh$. در این صورت h را ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار z می نامیم.مسلماً اگر $z\in C$ یک ویژه مقدار برای عملگر خطی T باشد عملگر $T-zI$ یک به یک نمی باشد.

تعریف ۱۱

مقدار منظم : فرض کنید که $T:H\to H$ یک عملگر خطی است . می گوییم $z\in C$ یک مقدار منظم برای عملگر T است هرگاه $T-zI$ یک به یک باشد و عملگر $(T-zI)^{-1}$ یک عملگر کراندار با دامنه ی چگال در H باشد.(پس عملگر $(T-zI)^{-1}$ قابل توسیع به یک عملگر کراندار بر H است.)

تعریف ۱۲

حلال عملگر خطی : فرض کنید که $T:H\to H$ یک عملگر خطی است . مجموعه ی همه ی نقاط منظم این عملگر را با $\rho(T)$ نشان می دهیم و آن را حلال T می نامیم.

تعریف ۱۳

طیف عملگر خطی : فرض کنید که $T:H\to H$ یک عملگر خطی است.مجموعه ی نقاط غیر منظم T را طیف این عملگر می نامیم و آن را با نماد $\sigma(T)$ نشان می دهیم. مسلماً : $\sigma(T)=\mathbf{C}-\rho(T)$.

$\sigma(T)$ ازسه بخش دو به دو مجزا تشکیل می شود.طیف نقطه ای یعنی $\sigma_p(T)$ که در واقع مجموعه ی مقادیر ویژه T هستند. طیف پیوسته یعنی $\sigma_c(T)$ شامل همه ی اعداد مختلط λ هستند که عملگر $T-\lambda I$ یک به یک و با برد چگال در H باشد که $(T-\lambda I)^{-1}$ بی کران باشد و بالاخره طیف باقیمانده یعنی $\sigma_r(T)$ شامل همه ی اعداد مختلط λ هستند که عملگر $T-\lambda I$ یک به یک و با برد غیر چگال در H باشد.

قضیه ۱۴ : فرض کنید $T:H\to H$ عملگری بسته باشد ، در این صورت حلال T یک مجموعه ی باز است و اذا طیف این عملگر یک محموعه ی بسته است.

قضیه۱۵ اگر $T:H\to H$ عملگری کراندر باشد ، اگر $|\lambda|>\|T\|$ آن گاه λ یک مقدار ویژه برای عملگر Tاست.پس طیف این عملگر مشمول در گوی بسته به مرکز صفر و شعاع $\|T\|$ است. پس طیف عملگرهای یکانی زیر مجموعه ای ازگوی واحد بسته به مرکز صفر است.

قضیه ۱۶ طیف عملگرهای خودالحاق ، زیرمجموعه ی اعداد حقیقی است.

تعریف ۱۷ : فر ض کنید که H یک فضای هیلبرت است عملگر $T:H\to H$ را قطاعی می نامیم هرگاه برد عددی این عملگر ، مشمول در یک قطاع $S_{c,\theta}$ باشد.

$$S_{c,\theta}=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\operatorname{Im}\lambda|\le\tan\theta(\operatorname{Re}\lambda-c)\}=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\arg(\lambda-c)|\le\theta\}$$

که در این جا $c\in\mathrm{R}$ راس قطاع و $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ نیم زاویه $S_{c,\theta}$ نام دارد.

پس برد عددی این عملگر مشمول در یک قطاع است و لذا این عملگرها قطاعی هستند.

مثال۱۸ : ماتریس $A=\begin{bmatrix} r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}$ که r یک عدد حقیقی مثبت است یک عملگر قطاعی است.

حل : برد عددی این عملگر مجموعه ی تک عضوی $\{r\}$ است.

هرگاه $X=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}$ بردار یکه ای در R^2 باشد داریم : $AX=\begin{bmatrix} r & 0\\ 0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rx\\ ry\end{bmatrix}=rX$ و لذا

$$\langle AX,X\rangle=\langle rX,X\rangle=r\|X\|^2=r$$

مثال۱۹ : فرض کنید که $f:[0,1]\to[0,\infty)$ تابعی پیوسته و عملگر خطی $T:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ بصورت $Tu(t)=u(t)f(t)$ تعریف شود . نشان دهید این عملگر قطاعی است.

حل : چون f مثبت و کراندار است، پس به ازای هر نیم زاویه حاده و مثبت θ مقادیر $f(t)$ در قطاع $S_{0,\theta}=S_\theta$ قرار می گیرند.
حال اگر $\|u\|=1$ آنگاه :

$$\langle Tu(t),u(t)\rangle=\langle u(t)f(t),u(t)\rangle=f(t)\langle u(t),u(t)\rangle=f(t)\|u(t)\|^2=f(t)\in S_\theta$$

پس برد عددی این عملگر، در داخل یک قطاع قرار می گیرد و لذا عملگر T قطاعی است.

مثال۲۰ : در مثال قبل اگر تابع f را مختلط مقدار به صورت $\begin{cases} f:[0,1]\to\mathbf{C}\\ f(t)=t+it\end{cases}$ تعریف کنیم آنگاه ، عملگر T قطاعی است.

حل :

$$\langle Tu(t),u(t)\rangle=\langle u(t)f(t),u(t)\rangle=f(t)\langle u(t),u(t)\rangle=f(t)\|u(t)\|=f(t)\in S_{\frac{\pi}{4}}$$

تعریف ۲۱

می گوییم یک عملگر ، m-قطاعی است هرگاه قطاعی و بسته باشد و به ازای لااقل یک z خارج از این قطاع، z عضو حلال این عملگر باشد.

ارتباط بین فرم های یک و نیم خطی یکی از زمینه های پرطرفدار ریاضی است. در اکثر کتاب هایی که درحیطه ی جبر خطی و فضاهای هیلبرت نوشته شده است می توان مطالب خوب و مفیدی در این زمینه پیدا کرد. اما ارتباط بین فرم های یک و نیم خطی بی کران و عملگرهای خطی از زمینه های باز در آنالیز ریاضی است .

تعریف ۲۲ : فرض کنید که H یک فضای هیلبرت مختلط و $D(t)$ یک زیر فضای آن باشد. نگاشت $t: D(t)\times D(t)\rightarrow \mathbf{C}$ را یک و نیم فرمی یا بطور خلاصه فرم با دامنه $D(t)$ می نامیم هرگاه نسبت به مولفه ی اول خطی و نسبت به مولفه دوم خطی مزدوج باشد.یعنی برای هر $x, y, z \in D(t), \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ داریم :

$$t[\alpha x+\beta y, z]=\alpha t[x, z]+\beta t[y, z]$$
$$t[x, \alpha y+\beta z]=\overline{\alpha} t[x, y]+\overline{\beta} t[x, z]$$

فرم درجه دوم متناظر با فرم t بصورت $t[x]=t[x, x]$ تعریف می شود.اگر به ازای هر $x \in D(t)$ داشته باشیم $t[x]\geq ۰$ آن گاه فرم t را مثبت می نامیم.

در فضاهای هیلبرت مختلط ، با کمک فرم درجه دوم می توان فرم یک و نیم خطی متناظرش را نوشت.

قضیه۲۳ (اتحاد قطبی) فرض کنید که t یک فرم یک و نیم خطی در فضای هیلبرت مختلط H باشد .در این صورت

$$t[x, y]=\frac{۱}{۴}\{t[x+y]-t[x-y]+it[x+iy]-it[x-iy]\}$$

می گوییم فرم t متقارن است هرگاه برای هر x,y عضو دامنه آن داشته باشیم : $t[x, y]=\overline{t[y, x]}$ مسلماً اگر فرم t متقارن باشد آن گاه فرم درجه دوم متناظر با آن حقیقی مقدار است.به ازای هر فرم t می توان فرم t^{*} را به آن نسبت داد که فرم الحاقی t نامیده می شود و داریم : $t^{*}[x, y]=\overline{t[y, x]}$

تعریف ۲۴ : هرگاه H یک فضای برداری بر میدان F (میدان اعداد حقیقی یا اعداد مختلط) باشد نگاشت $\langle .,. \rangle: H\times H\rightarrow \mathrm{F}$ یک ضرب داخلی یا اسکالر نام دارد هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف) به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم : $\langle x, x\rangle \geq 0$ و $\langle x, x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$

ب) به ازای هر $x, y, z \in H$ داشته باشیم : $\langle x, y+z\rangle=\langle x, y\rangle+\langle x, z\rangle$

پ) به ازای هر $x, y \in H, \lambda \in \mathrm{F}$ داشته باشیم : $\langle \lambda x, y\rangle=\lambda\langle x, y\rangle$

ت) به ازای هر $x, y \in H$ داشته باشیم : $\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}$

فضای برداری H مجهز به این ضرب داخلی را فضای ضرب داخلی می نامیم.

تذکر: از این به بعد میدان F را میدان اعداد مختلط در نظر می گیریم مگر این که خلاف آن گفته شود.

یک نتیجه ی بدیهی این تعریف به این صورت است:

$$\langle \lambda x+\mu y,z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\mu\langle y,z\rangle$$
$$\langle x,\lambda y\rangle=\overline{\lambda}\langle x,y\rangle$$
$$x,y\in H,\lambda,\mu\in \mathrm{C}$$

مثال ۲۵ : اگر فضای برداری C را میدان اعداد مختلط در نظر بگیریم آنگاه یک ضرب داخلی معروف بر C^n به صورت $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$ است.(ضرب داخلی استاندارد)

که در این جا $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in \mathrm{C}^n, y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in \mathrm{C}^n$

مثال : بر فضای توابع مخلتط مقدار پیوسته بر فاصله ی $[a,b]$ یعنی $C[a,b]$ فرمول زیر یک ضرب داخلی تعریف می کند.

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

تذکر۲۶ : هرگاه H یک فضای ضرب داخلی باشد ، می توان از طریق این ضرب، یک نرم تعریف کرد که بصورت زیر است.(نرم القایی بوسیله ضرب داخلی)

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

قضیه ۲۷ : (نابرابری کوشی –شوارتز) اگر x,y دو بردار دلخواه در فضای ضرب داخلی H باشند داریم:

$$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$$

قضیه ۲۸ : نسبت به نرم القایی ، ضرب داخلی ، تابعی پیوسته نسبت به هر دو مولفه است.

در ادامه به ذکر چند مثال از یافتن مقدارهای ویژه عملگرهای دیفرانسیلی معروف می پردازیم/

مثال۲۹ : در فضای $L^2(0,1)$ عملگر دیفرانسیلی $Ay=y''-4y'+3y$ را با شرایط مرزی $y(0)=y(1)=0$ در نظر بگیرید. مقدارهای ویژه این عملگر را در صورت وجود بیابید.

حل : فرض کنید که λ مقدار ویژه این عملگر باشد. مقدارهای ویژه ی آن در صورت وجود حقیقی هستند پس y یعنی تابع ویژه متناظر با این مقدار وجود دارد که $Ay=\lambda y$ و لذا $y''-4y'+3y=\lambda y$ یا بصورت معادل

$y''-4y'+(3-\lambda)y=0$.معادله مشخصه متناظر با این معادله دیفرانسیل عبارت است از: $r^2-4r+(3-\lambda)=0$ جواب های این معادله عبارتند از $r=\frac{4\pm\sqrt{4+4\lambda}}{2}=2\pm\sqrt{1+\lambda}$ اکنون سه حالت در نظر بگیرید.

حالت اول : $\lambda=-1$ در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه ی مضاعف است و لذا جواب معادله ی دیفرانسیل به صورت $y=(ax+b)e^{2x}$ است. حال شرایط مرزی را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow b=0 \\ y(1)=0 \Rightarrow ae^2=0 \Rightarrow a=0 \end{cases}$$

می بینیم که باید $y=0$ باشد که قابل قبول نیست. پس $\lambda=-1$ نمی تواند مقدار ویژه این عملگر باشد.

حالت دوم : $\lambda>-1$ در این حالت جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''-4y'+(3-\lambda)y=0$ به صورت زیر است.

$$y=ae^{\left(2+\sqrt{1+\lambda}\right)x}+be^{\left(2-\sqrt{1+\lambda}\right)x}$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow a+b=0 \\ y(1)=0 \Rightarrow ae^{\left(2+\sqrt{1+\lambda}\right)}+be^{\left(2-\sqrt{1+\lambda}\right)} \end{cases} \Rightarrow a=b=0$$

پس در این وضعیت هم ، عملگر داده شده فاقد مقدار ویژه است.

حالت سوم : $\lambda<-1$. در این حالت ریشه های معادله مشخصه ، مختلط و برابر $2\pm\sqrt{-(1+\lambda)}\,i=2\pm mi$ هستند. جواب عمومی معادله $y''-4y'+(3-\lambda)y=0$ بصورت $y=e^{2x}(a\cos mx+b\sin mx)$ است.

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow a=0 \\ y(1)=0 \Rightarrow e^2(b\sin m)=0 \end{cases}$$

از معادله دوم و این که b صفر نیست نتیجه می شود که $\sin m=0$ و لذا $\sqrt{-(1+\lambda)}=k\pi$ و در نتیجه $\lambda_k=-1-k^2\pi^2$ که $k=1,2,3,\ldots$. تابع ویژه متناظر با λ_k برابر $y_k=e^{2x}\sin(k\pi x)$ که $k=1,2,3,\ldots$.

قضیه ۳۰ : در فضای هیلبرت $L^{2}(0,1)$ عملگر دیفرانسیلی $Ay=ay''+by', y(0)=y(1)=0$ که a,b دو مقدار ثابت حقیقی هستند دارای مجموعه ای شمارش پذیر از مقدارهای ویژه است.

برهان: اگر λ مقدار ویژه ا ی از این عملگر خطی باشد آنگاه λ حقیقی است و $ay''+by'=\lambda y$. معادله مشخصه دارای دو ریشه است که عبارتند از $\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}+4a\lambda}}{2a}$ همان طوری که در مثال بالا هم دیدیم اگر $b^{2}+4a\lambda\geq 0$ آن گاه λ مقدار ویژه نیست.

پس فرض کنید که $b^{2}+4a\lambda<0$. در این حالت هر دو ریشه مختلط هستند:

$\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}+4a\lambda}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^{2}+4a\lambda}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-(b^{2}+4a\lambda)}}{2a}i$ پس جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل $ay''+by'=\lambda y$ برابر است با :

$$y=e^{\frac{-b}{2a}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{-(b^{2}+4a\lambda)}}{2a}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{-(b^{2}+4a\lambda)}}{2a}x\right)\right)$$

اگر شرایط آغازین را در نظر بگیریم خواهیم داشت : $\sin\left(\frac{\sqrt{-(b^{2}+4a\lambda)}}{2a}\right)=0$ و لذا

$$\frac{\sqrt{-(b^{2}+4a\lambda)}}{2a}=k\pi\Rightarrow\sqrt{-(b^{2}+4a\lambda)}=2ak\pi\Rightarrow b^{2}+4a\lambda=-(2ak\pi)^{2}\Rightarrow\lambda=\frac{-(2ak\pi)^{2}-b^{2}}{4a}$$

پس مقادیر ویژه عبارتند از :

$$\lambda_{k}=\frac{-(2ak\pi)^{2}-b^{2}}{4a},k=1,2,3,...$$

که بردار (تابع) ویژه متناظر با λ_{k} برابر است با

$$y_{k}(x)=e^{\frac{-b}{2a}x}\sin(k\pi x),k=1,2,...$$

نتایج اصلی

ابتدا دامنه عملگر دیفرانسیلی که در مقدمه معرفی کردیم را به یک مجموعه بسته تعمیم می دهیم. برای این منظور ابتدا فرض کنید که $\mathrm{H}=W_{2,\alpha}^{2}(0,1)$ فضای سوبولف وزن دار به همراه نرم زیر باشد .

$$|u(t)| = \left(\int_0^1 e^{2\alpha t} |u'(t)|^2 dt + \int_0^1 |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

فرض کنید که $\overset{\circ}{H}$ بستار فضای $C_0^\infty(0,1)$ نسبت به نرم سوبولفی بالا باشد.($C_0^\infty(0,1)$ یعنی مجموعه ی توابع بی -نهایت بار مشتق پذیر بر $(0,1)$ که دارای محمل فشرده باشند.) .دامنه ی عملگر A را به صورت زیر تعریف کنیم تا دامنه بسته باشد.([۱])

$$D(A) = \left\{ u \in \overset{\circ}{H} \cap W_{2,Loc}^2(0,1) : Au \in H \right\}$$

در این جا $W_{2,Loc}^2(0,1)$ عبارت است از فضای توابع u که بر هر زیرمجموعه ی باز J از $(0,1)$ مجموع $\sum_{i=1}^{2} \int_J |u^{(i)}(t)| dt$ متناهی باشد.

در این بخش می خواهیم درباره حلال عملگر A صحبت کنیم .قضیه ی زیر در بحث ما کاملاً پایه ای و زیربناست.

قضیه۳۱ : برای هر $0 \neq \lambda \in \Phi_{\theta_1\theta_2}$ و هر $t \in [0,1]$ می توانیم عدد مثبت k و $\gamma \in (-\pi, \pi]$ را طوری بیابیم که :

$$k \leq \operatorname{Re}\left\{ e^{i\gamma} \mu(t) \right\}, k|\lambda| \leq -\operatorname{Re}\left\{ e^{i\gamma} \lambda \right\} \qquad (2.1)$$

برهان : به [۷] مراجعه شود.

قضیه نمایش زیر هم برای ما بسیار کارگشا و تعیین کننده است. اثبات این قضیه و نتایج مهم آن را می توانید در کتاب [۱] ببینید.

قضیه۳۲ (اولین قضیه نمایش)

فرض کنید که $t[u,v]$ یک فرم یک ونیم خطی قطاعی با دامنه بسته وبصورت چگال تعریف شده در فضای هیلبرت H باشد.در این صورت متناظر با این فرم یک و نیم خطی ، عملگر m- قطاعی T وجود داردذ که $D(T) \subset D(t)$ و $t[u,v] = \langle Tu, v \rangle$.

قضیه۳۳ (قضیه تخمین حلال): هرگاه $\lambda \in \Phi_{\theta_1\theta_2}$ و $|\lambda|$ به قدر کافی بزرگ باشد آن گاه عملگر $(A - \lambda I)^{-1}$ موجود و پیوسته و در نتیجه کراندار است و عدد مثبت $M_{\theta_1\theta_2}$ وجود دارد که : $\left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\| \leq \frac{M_{\theta_1\theta_2}}{|\lambda|}$

برهان : به استناد قضیه داریم عدد مثبت k و $\gamma \in (-\pi,\pi]$ وجود دارند که : $k \le \operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\mu(t)\}$.با توجه به این که به ازای هر $v \in D(A)$ عدد $\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt$ عددی نامنفی است طرفین نامساوی سمت چپ در (2.1) را در $\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt$ ضرب می کنیم :

$$k\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt \le \operatorname{Re}\int_0^1 e^{i\gamma}e^{2\alpha t}\mu(t)|v'(t)|^2 dt = \operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\langle Av,v\rangle\}$$

اما طبق قضیه قبل داریم : $k|\lambda| \le -\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\lambda\}$ و همواره $\int_0^1 |v(t)|^2 dt = \langle v,v\rangle = \|v\|^2 > 0$ پس داریم :

$$|\lambda| \le -\frac{1}{k}\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\lambda\} \Rightarrow |\lambda|\|v\|^2 \le -\frac{1}{k}\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\lambda\}\|v\|^2 \Rightarrow$$
$$|\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \le -\frac{1}{k}\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\lambda\}\langle v,v\rangle$$

از رابطه داریم :

$$\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt \le \frac{1}{k}\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\langle Av,v\rangle\}$$

از جمع رابطه های اثبات شده در بالا داریم :

$$\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt + |\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \le \frac{1}{k}\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\langle Av-\lambda v,v\rangle\}$$

حال از رابطه ی نتیجه می شود که:

$$\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt + |\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \le \frac{1}{k}\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

چون $\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt$ نامنفی است پس از رابطه داریم :

$$|\lambda|\|v\| \le \frac{1}{k}\|(A-\lambda I)v\|$$

از رابطه نتیجه می شود که عملگر $(A-\lambda)$ یک به یک است.فرض کنید که : $v=(A-\lambda)^{-1}f$ حال از رابطه ی نتیجه می شود که :

$$|\lambda|\left\|(A-\lambda)^{-1}f(t)\right\| \le \frac{1}{k}\|f(t)\|$$

و در نتیجه داریم : $\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\| \le \frac{M_{\theta_1\theta_2}}{|\lambda|}$ که در آن $M_{\theta_1\theta_2}=\frac{1}{k}$.

قضیه۳۴ :

هرگاه $\lambda \in \Phi_{\theta_1\theta_2}$ و $|\lambda|$ به قدر کافی بزرگ باشد آن گاه عدد مثبت $M'_{\theta_1\theta_2}$ وجود دارد که :

$$\left\|e^{\alpha t}\frac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}\right\| \le M'_{\theta_1\theta_2}|\lambda|^{-\frac{1}{2}}$$

برهان : در اثبات قضیه قبل دیدیم که :

$$\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt + |\lambda|\int_0^1 |v(t)|^2 dt \le M_{\theta_1\theta_2}\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$$

پس داریم : $\int_0^1 e^{2\alpha t}|v'(t)|^2 dt \le M_{\theta_1\theta_2}\|v\|\|(A-\lambda I)v\|$. حال اگر $v=(A-\lambda)^{-1}f$ خواهیم داشت :

$$\int_0^1 e^{2\alpha t}\left|\frac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)\right|^2 dt \le M_{\theta_1\theta_2}\|v\|\|(A-\lambda I)v\| \Rightarrow \int_0^1\left|e^{\alpha t}\frac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)\right|^2 \le M_{\theta_1\theta_2}\left\|(A-\lambda I)^{-1}f(t)\right\|\|f(t)\|$$

$$\left\|e^{\alpha t}\frac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)\right\|^2 \le M_{\theta_1\theta_2}|\lambda|^{-1}|f(t)|^2 \Rightarrow \left\|e^{\alpha t}\frac{d}{dt}(A-\lambda I)^{-1}f(t)\right\| \le \sqrt{M_{\theta_1\theta_2}}|\lambda|^{\frac{-1}{2}}$$

پس با فرض این که $M'_{\theta_1\theta_2}=\sqrt{M_{\theta_1\theta_2}}$ اثبات تمام است.

References

[۱] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, New York, 1966.

[۲] S. Agmon, lectures on elliptic boundary value problems, American mathematical society, ۱۹۶۵

[۳] M.S.Agranovich, elliptic boundary problems, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 1997

[۴] A. Sameripour and K.Seddigh, *on the spectral properties of generalized non-selfadjoint elliptic systems of differential operators degenerated on the boundary of domain*, bull. Iranian Math. Soc, 24(1998), no.1, 15-32

[۵] A. Sameripour and K. Seddigh, *Distribution of the eigenvalues nonselfadjoint elliptic systems that degenerated on the boundary of domain*, (Russian) Mat. Zametki 61(1997), no, ۳, ۴۶۳-۴۶۷ translation in Math. Notes 61(1997) no, 3-4. 379-384.

[۶] K. Kh.Boimatov and K.Seddighi, *on some spectra properties of ordinary differential operators generated by noncoercive forms*, Dokl. Akad. Nauk. Rossyi, 1996, to appear (Russian).

[۷] A.Sameripour, Y.Yadollahi, Topics on the spectral properties of degenerate non-self-adjoint differential operators, Journal of Inequality and applications (2016) 2016:207, DOI ۱۰.۱۱۸۶/s13660-016-1138-5

[۸] El Maati Ouhabaz, Analysis of heat equations on domains, Published by Princeton University Press2005

[۹] Radek Novak, **Mathematical analysis of quantum mechanics with non-self-adjoint operators,** Doctoral thesis, University of Nantes Jean Leray Mathematics Institute and Czech Technical University in Prague Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering 2018

[۱۰] Reza Alizadeh , Ali Sameripour " On The Spectral Properties of Non- Self-Adjoint Elliptic Differential Operators in Hilbert space " Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications **4** (2020) No. 4, 316–320

[۱۱] R.Alizadeh, A.Sameripour, Spectral Properties and Distribution of Eigenvalues of Non selfadjoint Elliptic Differential Operators, International Journal of Applied Mathematics, Vol 34, Issue: 1, 2021. DOI: 10.12732/ijam.v34i1.11

[12] Reza Alizadeh, & Ali Sameripour. (2021). On the Resolvent of a Non-Self-Adjoint Differential Operator in Hilbert Spaces. Online Mathematics Journal, 03(01), 1–7. DOI: 10.5281/zenodo.4595051.

[13] Radek Novak. Mathematical analysis of quantum mechanics with non-self-adjoint operators. Functional Analysis [math.FA]. Université de Nantes; Czech Technical University in Prague, 2018.