فصلنامه رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی

سال هفتم، شماره ۲۴، بهار ۱۴۰۳

ISSN: ۲٦٤٥-٥٤٣٩

www.jonarbset.ir

روشی برای حل مسائل حمل و نقل تک هدفه فازی

مریم اصلی[۱]

[۱]عضو هیات علمی دانشگاه فنی و حرفه ای ایران- زاهدان

چکیده

مدل های ترابری نقش مهمی را در تدارکات و عرضه زنجیره مدیریت برای کاهش هزینه و بهبود خدمت رسانی ایفا می کنند. در این مقاله روشی را برای بدست آوردن مقدار تابع هدف مسئله حمل ونقل فازی زمانی که ضرایب هزینه و کمیت های عرضه و تقاضا اعداد فازی باشند مورد بررسی قرار می دهیم. این ایده بر اساس اصل کسترش استوار می باشد. روش محاسبه بدین صورت است که هزینه کلی مسئله حمل ونقل فازی با محدودیت نا مساوی در سطح امکانی α به دو برنامه ریزی ریاضی در کرانهای بالا و پایین تابع هدف فرموله شده آنگاه توابع عضویت تابع هدف بر اساس α های مختلف بدست می آید.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی، مجموعه برشهای فازی، برنامه ریزی حمل و نقل فازی، توابع عضویت، سطح امکانی α، اصل گسترش، زنجیره مدیریت، عرضه وتقاضا

---

۱. مقدمه

کاربرد موفقیت آمیز مجموعه های فازی در سیستمهای کنترل در دهه ۸۰ موجب گسترش وسیع مجموعه های فازی در سایر زمینه ها و کاربردها گردید. استفاده از مجموعه های فازی در برنامه ریزی ریاضی دارای تاریخچه طولانی است. جهش واقعی و ناگهانی در بکارگیری تئوری مجموعه فازی در برنامه ریزی ریاضیوجود ندارد . تاریخچه برنامه ریزی ریاضی بسیار غنی است و نتیجه تلاشهای پیوسته و مستمر محققین در این زمینه است . برنامه ریزی ریاضی فازی را می توان به سه دسته عمده تقسیم بندی نمود . دسته اول . برنامه ریزی ریاضی فازی توسط بلمن (Bellman) وزاده (Zadeh) [۵] به صورت تصمیم گیری و ماکزیمم سازی فازی مطرح گردید . تاناکا (Tanaka) [۶] نیز در زمینه فرمول بندی برنامه ریزی فازی و ارائه یک جواد سازگار برای مسئله و زیمرمن (Zimmerman) [۷] در مسائل برنامه ریزی فازی با چند تابع هدف بحث کرده اند که در آن مسائل تصمیم گیری با اهداف و قیود فازی مورد بررسی قرار گرفتند . اهداف و قیود فازی انعطاف تابع هدف و قابلیت تغییر قیود را نشان می دهند . به این دلیل این برنامه ریزی را "برنامه ریزی قابل انعطاف " می نامند . در برنامه ریزی که ضرائب تابع هدف وقیود مقادیر نادقیق باشد و بحثی از فازی بودن هدف و قیود به طور کلی مطرح نیست توسط دوبیس (Dubois) و پرید (prade)[۱۱] مطرح گردید . این برنامه ریزی "برنامه ریزی امکانی "نامیده میشود سومین نوع برنامه ریزی که توسط نگوئیتا (Negoita) [۸] ارائه گردید برنامه ریزی تنومند نام گرفت که در آن الویت های تصمیم گیرنده توسط یک ناحیه تصدیق فازی ویک مقدار تابع هدف آرمانی تعیین می شود . عموماً مدلهای برنامه ریزی فازی برای مسائل "بد تعریف " بکار می روند . مسائلی که مفاهیم و پارامترها دارای ابهام بوده واز دقت لازم برخوردار نیستند . در اینگونه موارد با تبدیل مدل فازی به یک مدل کلاسِک آنرا با تکنیکهای معمول بهینه سازی نموده و چون این جواب بهین برای مدل فازی اولیه نبوده . آنرا مجدداً مورد بررسی قرار داده و در صورت بهین نبودن با تعابیر جدید بار دیگر مسئله را حل نموده و روند را تا دستیابی به جواب بهینه ادامه میدهند[۳] . مدلی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است برنامه ریزی نوع اول می باشد یعنی وقتی در یک مدل حمل ونقل ضرائب هزینه عرضه و تقاضا فازی باشند[۱۱]

۲. مسئله حمل و نقل فازی :

یک مسئله حمل و نقل که دارای m گره عرضه وn گره تقاضا و C_{ij} ها هزینه ارسال یک دستگاه از گره عرضه I به گره تقاضای j بوده و همچنین x_{ij} تعداد دستگاههای فرستاده شده از منبع I به مقصد J باشد به صورت ذیل فرموله می شود[۱] :

$$
\begin{aligned}
Z = \min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.t \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \qquad i = 1,\dots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \qquad j = 1,\dots, n \\
& x_{ij} \ge 0 \qquad \forall\, i, j
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

طبیعتا اگر واحدهای c_{ij} ، s_j یا d_i فازی باشد هزینه کلی ترابری Z نیز فازی می شود و مسئله حمل و نقل معمـولی در (۱) بصورت مسئله حمل و نقل فازی زیر تبدیل می شود .

فرض کنید هزینه ارسال c_{ij} , عرضه s_i و تقاضا d_j تقریبا مشخص شده اند ومی توانند با مجموعه های محدب تقریبـی فـازی $\tilde{C}_{ij}, \tilde{S}_i, \tilde{D}_j$ بیان شده باشند. توجه کنید که مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدبست اگر $\lambda \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in X$

$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1),\mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$، فرض کنید $\mu_{\tilde{S}_i}$ ، $\mu_{\tilde{C}_{ij}}$ و $\mu_{\tilde{D}_j}$ توابع عضویت آنها را نشان دهد[۴.] [۱۰]، داریم

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ij} &= \{(c_{ij},\mu_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}))|c_{ij}\in S(\tilde{C}_{ij})\}\\ \tilde{S}_i &= \{(s_i,\mu_{\tilde{S}_i}(s_i))|s_i\in S(\tilde{S}_i)\}\\ \tilde{D}_j &= \{(d_j,\mu_{\tilde{D}_j}(d_j))|d_j\in S(\tilde{D}_j)\}\end{aligned} \qquad (۲)$$

در اینجا $S(\tilde{C}_{ij})$ $S(\tilde{S}_i)$ ، و $S(\tilde{D}_j)$ تکیه گاههای $\tilde{C}_{ij},\tilde{S}_i,\tilde{D}_j$ هستند که این امر مجموعه هـای مرجـع هزینـه ارسـالی دستگاه، میزان عرضه توسط I عرضه کننده و مقدار نیاز J مشتری را بطور نسبی مشخص می کنند بنابراین مسئله حمـل و نقل فازی به شکل زیر است :

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_{ij}x_{ij}\\ s.t \quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leq \tilde{S}_i \qquad i=1,\dots,m\\ & \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geq \tilde{D}_j \qquad j=1,\dots,n\\ & x_{ij}\geq 0 \qquad \forall i,j\end{aligned} \qquad (۳)$$

بدون اینکه به کلیت خللی وارد آید ، می تواند فرض کرد تمامی هزینه ها، عرضه و تقاضا دراین روش اعداد فازی هستند ، زیرا مقادیر معمولی می تواند بوسیله تابع عضویت تبهگنی که تنها یک مقدار در حوزه تعریف شان است نشان داده شوند .

جولین و پرا برای مقدار تابع هدف روش توزیع امکانی را استفاده کرده اند.[۲] که دربرخی موارد روشهای ایشان جهت بدست آوردن پاسخ های صحیح مناسب نیستند. به عنوان نمونه ، مسئله حمل ونقل دارای دو گره عرضه $\tilde{S}_1=(2,3,5), s_2=5$ و دوگره تقاضا $d_1=4,\tilde{D}_2=(1,3,6)$ که در اینجا $\tilde{S}_1$ و $\tilde{D}_2$ عددهای فازی مثلثی هستند بصورت ذیل فرموله می شوند:

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \min \quad x_{11}+3x_{12}+7x_{21}+2x_{22}\\ s.t. \quad & x_{11}+x_{12}\leq (2,3,5)\\ & x_{21}+x_{22}\leq 5\\ & x_{11}+x_{21}\geq 4\\ & x_{12}+x_{22}\geq (1,3,6)\\ & x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\geq 0\end{aligned}$$

طبق روشهای جولین و پرا کران پایین مقدار تابع هدف Z_α^L وکران بالای تابع هدف Z_α^U در $\alpha=0$ تقریبا با قرار دادن مقدار سمت راست محدودیتهای عددهای فازی برای کران پایین و بالا محاسبه می شوند .بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} Z^{L}_{\alpha=0} = \min \quad & x_{11} + 3x_{12} + 7x_{21} + 2x_{22} \\ s.t. \quad & x_{11} + x_{12} \le 2 \\ & x_{21} + x_{22} \le 5 \\ & x_{11} + x_{21} \ge 4 \\ & x_{12} + x_{22} \ge 1 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z^{U}_{\alpha=0} = \min \quad & x_{11} + 3x_{12} + 7x_{21} + 2x_{22} \\ s.t. \quad & x_{11} + x_{12} \le 5 \\ & x_{21} + x_{22} \le 5 \\ & x_{11} + x_{21} \ge 4 \\ & x_{12} + x_{22} \ge 6 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0 \end{aligned}$$

این دو مسئله حمل و نقل شدنی هستند و مقدار تابع هدف بهین بدست آمده $Z^{L}_{\alpha=0} = 18$ و $Z^{U}_{\alpha=0} = 17$ می باشند . کران پایین در تناقضی بزرگتر از کران بالاست . زیرا در حقیقت ، پاسخ صحیح این مثال وقتیکه $S_1 = (4$ یا $5)$ و $d_2 = 1$ و $Z^{L}_{\alpha=0} = 6$ وزمانیکه $S_1 = 2$ و $d_2 = 3$ ، $Z^{U}_{\alpha=0} = 22$ است .

دربخش بعدی ، راه حلهای مسائل حمل ونقل با محدودیتهای نامساوی را توضیح می دهیم.

۲-۱- راه حل :محدودیتهای نامساوی

α – برش ، $\tilde{C}_{ij}, \tilde{S}_i, \tilde{D}_j$ چنین هستند.

$$(C_{ij})_\alpha = \left[(C_{ij})^L_\alpha, (C_{ij})^U_\alpha\right] = \left[\min_{c_{ij}} \left\{c_{ij} \in S(\tilde{C}_{ij}) \middle| \mu_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}) \ge \alpha\right\} \ , \ \max_{c_{ij}} \left\{c_{ij} \in S(\tilde{C}_{ij}) \middle| \mu_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}) \ge \alpha\right\}\right]$$

$$(S_i)_\alpha = \left[(S_i)^L_\alpha, (S_i)^U_\alpha\right] = \left[\min_{s_i} \left\{s_i \in S(\tilde{S}_i) \middle| \mu_{\tilde{S}_i}(s_i) \ge \alpha\right\} \ , \ \max_{s_i} \left\{s_i \in S(\tilde{S}_i) \middle| \mu_{\tilde{S}_i}(s_i) \ge \alpha\right\}\right]$$

$$(D_j)_\alpha = \left[(D_j)^L_\alpha, (D_j)^U_\alpha\right] = \left[\min_{d} \left\{d_j \in S(\tilde{D}_j) \middle| \mu_{\tilde{D}_j}(d_j) \ge \alpha\right\} \ , \ \max_{d_j} \left\{d_j \in S(D_j) \middle| \mu_{\tilde{D}_j}(d_j) \ge \alpha\right\}\right]$$

این بازه ها نشان می دهند که هزینه ارسال دستگاه ،عرضه و تقاضا در سطح امکانیα قرار دارند. فرض کنید ، چنانچه بخواهیم تابع عضویت هزینه کل حمل ونقل($\tilde{Z}$) را بدست آوریم با مشکل تنوع مقادیر هزینه های ارسال دستگاه ، تعددکمیتهای عرضه و تقاضا مواجه هستیم. یک ایده استفاده از اصل گسترش زاده است . برپایه اصل گسترش ، تابع عضویت $\mu_{\tilde{Z}}$ بدینگونه می تواند معرفی شود .

$$\mu_{\tilde{Z}}(z) = \sup_{c,s,d} \min\left\{ \mu_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}), \mu_{\tilde{S}_j}(s_i), \mu_{\tilde{D}_j}(d_j), \forall i,j \middle| z = Z(c,s,d)\right\} \qquad (۵)$$

دراینجا $Z(c,s,d)$ در مدل (۲-۱) معرفی شده است .اگر α- برشهای $\tilde{Z}$ در تمام مقادیرتباهیده α به نقطه یکسانی منتهی شود آنگاه هزینه کلی ترابری یک عدد معمولی است . درغیر اینصورت یک عدد فازیست . در معادله (۵) چند تابع عضویت بسط داده شده اند . بدست آوردن $\mu_{\tilde{Z}}$ به سختی میسراست . برطبق(۵) $\mu_{\tilde{Z}}$ کمترین مقدار $\mu_{\tilde{C}_{ij}}, \mu_{\tilde{S}_i}, \mu_{\tilde{D}_j}$ برای هر i وj هست که ما به $\mu_{\tilde{C}_{ij}}(C_{ij}) \ge \alpha, \mu_{\tilde{S}_i}(S_i) \ge \alpha, \mu_{\tilde{D}_j}(d_j) \ge \alpha$ و حداقل یکی از $\mu_{\tilde{C}_{ij}}(C_{ij}), \mu_{\tilde{S}_i}(S_i), \mu_{\tilde{D}_j}(d_j)$ مساوی با α نظیر $z = Z(c,s,d)$ نیاز داریم تا $\mu_{\tilde{Z}}(z) = \alpha$ صدق کند .برای پیدا کردن تابع عضویت $\mu_{\tilde{Z}}$ کافیست

شکلهای تابع چپ و راست $\mu_{\tilde{Z}}$ رابدست آوریم که معادل با محاسبه حدچپ Z_α^L و حدراست Z_α^U برش α تابع $\tilde{Z}$ است . چونکه Z_α^L کمترین و Z_α^U بیشترین مقدار $z = Z(c,s,d)$ هستند آنها می توانند به این صورت بیان شوند.

$$Z_\alpha^L = \min\left\{Z(c,s,d) \middle| (C_{ij})_\alpha^L \le c_{ij} \le (C_{ij})_\alpha^U, (S_i)_\alpha^L \le s_i \le (S_i)_\alpha^U, (D_j)_\alpha^L \le d_j \le (D_j)_\alpha^U, \forall i,j\right\}$$

$$Z_\alpha^U = \max\left\{Z(c,s,d) \middle| (C_{ij})_\alpha^L \le c_{ij} \le (C_{ij})_\alpha^U, (S_i)_\alpha^L \le s_i \le (S_i)_\alpha^U, (D_j)_\alpha^L \le d_j \le (D_j)_\alpha^U, \forall i,j\right\}$$

وبصورت یک زوج برنامه ریزی ریاضی دوترازه فرموله شود .

$$Z_\alpha^l = \min_{\substack{(C_{ij})_\alpha^l \le c_{ij} \le (C_{ij})_\alpha^u \\ (S_i)_\alpha^l \le s_i \le (S_i)_\alpha^u \\ (D_j)_\alpha^l \le d_j \le (D_j)_\alpha^u \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i & , i=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j & , j=1,\dots,n \\ & x_{ij} \ge i, j & , \forall i, j \end{array} \right\}$$

$$Z_\alpha^u = \max_{\substack{(C_{ij})_\alpha^l \le c_{ij} \le (C_{ij})_\alpha^u \\ (S_i)_\alpha^l \le s_i \le (S_i)_\alpha^u \\ (D_j)_\alpha^l \le d_j \le (D_j)_\alpha^u \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i & , i=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j & , j=1,\dots,n \\ & x_{ij} \ge i, j & , \forall i, j \end{array} \right\} \qquad (٦)$$

حداقل یکی از c_{ij}, s_i یا d_j بایستی برمرز α-برشهایش برای صدق در رابطه $\mu_{\tilde{Z}}(z) = \alpha$ منطبق باشد.

شرط لازم وکافی برای داشتن پاسخ های شدنی مدل (۶) $\sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j$ است .درتراز اول روش (۶) s_i و d_j به ترتیب مجاز به تغییر در بازه $[(S_i)_\alpha^L, (S_i)_\alpha^U]$ و $[(D_j)_\alpha^L, (D_j)_\alpha^U]$ هستند . بنابراین تراز دوم مسئله ترابری عملی خواهد بود ، لازمست که محدودیت $\sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{m} d_j$ در تراز اول اعمال شود . لذا مدل (۶) چنین می شود

$$Z_{\alpha}^{l} = \min_{\substack{(C_{ij})_{\alpha}^{l} \le c_{ij} \le (C_{ij})_{\alpha}^{u} \\ (S_i)_{\alpha}^{l} \le s_i \le (S_i)_{\alpha}^{u} \\ (D_j)_{\alpha}^{l} \le d_j \le (D_j)_{\alpha}^{u} \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i & ,i=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j & ,j=1,\dots,n \\ & x_{ij} \ge 0 & ,\forall i,j \end{array} \right. \quad (۷)$$

$$Z_{\alpha}^{u} = \max_{\substack{(C_{ij})_{\alpha}^{l} \le c_{ij} \le (C_{ij})_{\alpha}^{u} \\ (S_i)_{\alpha}^{l} \le s_i \le (S_i)_{\alpha}^{u} \\ (D_j)_{\alpha}^{l} \le d_j \le (D_j)_{\alpha}^{u} \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i & ,i=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j & ,j=1,\dots,n \\ & x_{ij} \le i,j & ,\forall i,j \end{array} \right\} \quad (۸)$$

اگر $\sum_{i=1}^{m}(S_i)_{\alpha=0}^{U} \le \sum_{i=1}^{m}(D_i)_{\alpha=0}^{L}$ باشد مدل(۸) و(۷) برای هیچکدام ازسطوح α شدنی نخواهد بود . به بیان دیگر ، اگر کران بالای عرضه بزرگتریا مساوی کران پایین تقاضاباشد مسئله حمل ونقل فازی شدنی است.

برای تعیین حدپایین مقدار تابع هدف مدل(**۷**) می توانیم مستقیما برای هر i,j کران پایین $(C_{ij})_{\alpha}^{L}$ رادر c_{ij} قرار دهیم . بنابراین مدل (**۷**) بدینصورت فرموله شود

$$Z_{\alpha}^{l} = \min_{\substack{(C_{ij})_{\alpha}^{l} \le c_{ij} \le (C_{ij})_{\alpha}^{u} \\ (S_i)_{\alpha}^{l} \le s_i \le (S_i)_{\alpha}^{u} \\ (D_j)_{\alpha}^{l} \le d_j \le (D_j)_{\alpha}^{u} \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i,j}} \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge s_i & ,i=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j & ,j=1,\dots,n \\ & x_{ij} \ge 0 & ,\forall i,j \end{array} \right. \quad (۹)$$

چونکه مدل(۹) برای پیدا کردن مینیمم تمام مقادیرتابع هدف است ، شخص می تواند محـدودیتهای تـراز اول را در تـرازدوم قرار داده و بسادگی برنامه ریزی دو ترازه به مدل یک ترازه معمولی ذیل تبدیل کند:

$$Z_\alpha^l = \min \left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq s_i \quad , i=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad , j=1,\dots,n \\ & \sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j \end{array} \right\} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{array}{ll} (S_i)_\alpha^l \leq s_i \leq (S_i)_\alpha^u & , i=1,\dots,m \\ (D_j)_\alpha^l \leq d_i \leq (D_j)_\alpha^u & , j=1,\dots,m \\ x_{ij} \geq 0 & \forall i, j \end{array}$$

این مدل یک برنامه ریزی خطی است که می تواند به آسانی حل شود . دراین مدل چونکه همه c_{ij} در کرانهای پایین برشهای αشان قرار می گیرندو $\mu_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}) = \alpha$، با توجه به رابطه (۵) مطمئنا $\mu_{\tilde{Z}}(z) = \alpha$است.

برای حل مدل(۸) دوگان تراز ۲ بصورت یک مسئله ماکزیمم سازی سازگار با عمل ماکزیمم سازی تراز ۱ فرموله می شود.با توجه به قضیه آشنای دوگان برنامه ریزی خطی، مقدار تابع هدف اولیه و دوگان یکسان می باشد.مدل(۸)به شکل ذیل می باشد:

$$Z_\alpha^u = \max_{\substack{(C_{ij})_\alpha^l \leq c_{ij} \leq (C_{ij})_\alpha^u \\ (S_i)_\alpha^l \leq s_i \leq (S_i)_\alpha^u \\ (D_j)_\alpha^l \leq d_j \leq (D_j)_\alpha^u \\ \sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j \\ \forall i, j}} \left\{ \begin{array}{lll} \max & -\sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j & \\ s.t. & -u_i + v_j \leq c_{ij} & , i=1,\dots,m \quad , j=1,\dots,n \\ & u_i, v_j \geq 0 & , \forall i, j \end{array} \right. \qquad (۱۱)$$

چونکه درمدل(۱۱) برای $(C_{ij})_\alpha^L \leq c_{ij} \leq (C_{ij})_\alpha^U, \forall i, j$داریم ، شخص می تواند کران بالای مقدار تابع هدف مورد نظر را با قرار دادن کران بالای $(C_{ij})_\alpha^U$ برای c_{ij} را بدست آورد ،. زیرا بزرگترین ناحیه شدنی بوجود می آید . درنتیجه ، ما مدل (۱۱) را اینگونه فرموله می کنیم:

$$Z_\alpha^u = \max_{\substack{(C_{ij})_\alpha^l \le c_{ij} \le (C_{ij})_\alpha^u \\ (S_i)_\alpha^l \le s_i \le (S_i)_\alpha^u \\ (D_j)_\alpha^l \le d_j \le (D_j)_\alpha^u \\ \sum_{i=1}^m s_i \ge \sum_{j=1}^n d_j \\ \forall i,j}} \begin{cases} \max & -\sum_{i=1}^m s_i u_i + \sum_{j=1}^n d_j v_j \\ s.t. & -u_i + v_j \le (C_{ij})_\alpha^u \quad ,i=1,\dots,m \quad ,j=1,\dots,n \\ & u_i, v_j \ge 0 \quad ,\forall i,j \end{cases} \tag{۱۲}$$

اکنون ، چونکه هردو تراز اول ودوم ، ماکسیمم سازی می باشد. محدودیتهای آنها می توانند بصورت برنامه یک ترازه ریاضی ذیل ترکیب شود:

$$\begin{aligned} Z_\alpha^U = \max \quad & -\sum_{i=1}^m s_i u_i + \sum_{j=1}^n d_j v_j \\ s.t. \quad & -u_i + v_j \le (C_{ij})_\alpha^U \quad ,i=1,\dots,m \quad ,j=1,\dots,n \\ & \sum_{i=1}^m s_i \ge \sum_{j=1}^n d_j \\ & (S_i)_\alpha^l \le s_i \le (S_i)_\alpha^u \quad ,i=1,\dots,m \\ & (D_j)_\alpha^l \le d_i \le (D_j)_\alpha^u \quad ,j=1,\dots,m \\ & u_i, v_j \ge 0 \quad ,\forall i,j \end{aligned} \tag{۱۳}$$

این یک مدل برنامه ریزی غیرخطی بطور خطی مقید می باشد . چندین روش موثر و کارا برای حل مسئله (۱۲) وجود دارد. مشابه مدل(۱۰) چون تمام c_{ij} ها درکرانهای بالای α-برشهایشان قرار دارند ، $\mu_{\tilde{C}_{ij}}(c_{ij}) = \alpha$ و باتوجه به رابطه(۵)، $\mu_{\tilde{Z}}(z) = \alpha$ است.

اگر حد پایین تقاضا از حدبالای عرضه کوچکترباشد (بعنوان مثال $\sum_{i=1}^n (D_j)_{\alpha=0}^L \le \sum_{i=1}^m (S_i)_{\alpha=0}^U$) مطمئناً مسائل (۷)و(۸) شدنی می باشند. اگر این شرط صادق نباشد، آنگاه مسئله نشدنی خواهد بود . دراین مورد،یک نقطه مصنوعی عرضه ($m+1$) و یک مقدار از $S_{m+1} \ge \sum_{i=1}^m (D_j)_{\alpha=0}^L - \sum_{i=1}^m (S_i)_{\alpha=0}^U$ مانند مسئله معمولی حمل ونقل می تواند برای شدنی بودن مسئله فرض شده باشد. این مقدار ارسال شده از نقطه ساختگی مبدأ کوچکتر از مقدار مقصد است.

برای دوسطح امکان α_1و α_2چنانکه $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \le 1$نواحی شدنی تعریف شده α_1 درروش (۱۰)و(۱۳) کوچکتر از مقادیر معرفی شده برای α_2 هستند.

نتیجتا $(Z)_{\alpha_1}^L \ge (Z)_{\alpha_2}^L$و $(Z)_{\alpha_1}^U \ge (Z)_{\alpha_2}^U$ به عبارت دیگرشکل تابع چپ و راست نزولی هستند. این خاصیت ، برتعاریف مجموعه محدب فازی ومطمئنا برترتیب $\tilde{Z}$ مبتنی است. اگر هردو Z_α^Lو Z_α^U نسبت به α معکوس پذیر باشند آنگاه شکل تابع چپ و راست بترتیب عبارتند از $L(z) = (z_\alpha^L)^{-1}$ و $R(z) = (z_\alpha^u)^{-1}$ وتابع عضویت $\mu_{\tilde{Z}}$بصورت ذیل ساخته می شود

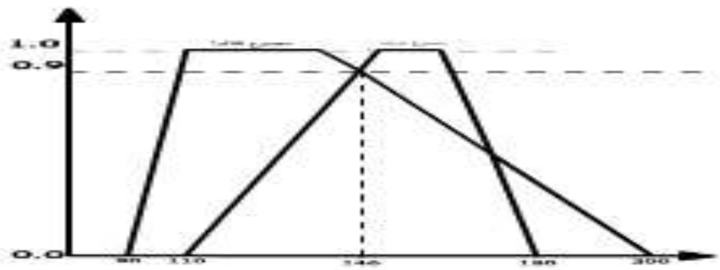
$$\mu_{\tilde{Z}} = \begin{cases} L(z) & (Z)_{\alpha=0}^L \le z \le (Z)_{\alpha=1}^L \\ 1 & (Z)_{\alpha=1}^L \le z \le (Z)_{\alpha=1}^U \\ R(z) & (Z)_{\alpha=1}^U \le z \le (Z)_{\alpha=0}^U \end{cases} \tag{۱٤}$$

دراکثر موارد ، مقدار Z_α^L و Z_α^Uممکن است بطور تحلیلی حل نشود. ازاینرو ،پاسخ های عددی برای Z_α^Lو Z_α^U در سطوح امکانی α های مختلف با محاسبه تقریبی شکل تابعهای $L(z)$و $R(z)$ می توانند جمع آوری شوند.

مثال ۱- جهت روشن شدن راه حل پیشنهادی ، مثال زیر ارائه می شود :

۱ عرضه و ۳ تقاضا اعداد مثلثی فازی و بقیه ذوزنقه ای فازی هستند. مسئله به شکل زیر است.

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} = \min \quad & 10x_{11} + 50x_{12} + 80x_{13} + (60,70,80,90)x_{21} + 60x_{22} + 20x_{23} \\
s.t \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \le (70,90,100) \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \le (40,60,70,80) \\
& x_{11} + x_{21} \ge (30,40,50,70) \\
& x_{12} + x_{22} \ge (20,30,40,50) \\
& x_{13} + x_{23} \ge (40,50,80) \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \ge 0
\end{aligned}
$$



شکل ۱. کل عرضه و تقاضا برای مثال ۱

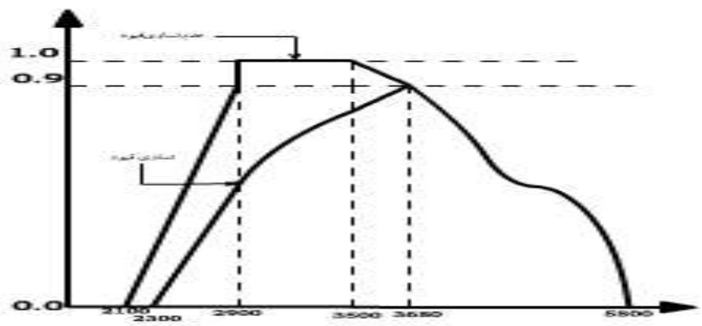
رویهمرفته ، کل عرضه $\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = (110,150,160,180)$ و کل تقاضا $\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2 + \tilde{D}_3 = (90,120,140,200)$ درنمودار نشان داده شده است . به عبارت دیگر ، کران بالای عرضه فازی بزرگتر از کران پایین تقاضای فازیست و این ایجاب می کندکه مسئله شدنی است .بنابراین بااستفاده از مدل های (۱۰)و(۱۳) حدود پایین و بالای $\tilde{Z}$ درسطح امکانی α به ترتیب زیر حل می شوند.

$$
\begin{aligned}
& Z_\alpha^L = \min \quad 10x_{11} + 50x_{12} + 80x_{13} + (60+10\alpha)x_{21} + 60x_{22} + 20x_{23} \\
& s.t. \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \le s_1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \le s_2 \\
& x_{11} + x_{21} \ge d_1 \\
& x_{12} + x_{22} \ge d_2 \\
& x_{13} + x_{23} \ge d_3 \\
& s_1 + s_2 \ge d_1 + d_2 + d_3 \\
& 70 + 20\alpha \le s_1 \le 100 - 10\alpha, 40 + 20\alpha \le s_2 \le 80 - 10\alpha \\
& 30 + 10\alpha \le d_1 \le 70 - 20\alpha, 20 + 10\alpha \le d_2 \le 50 - 10\alpha \\
& 40 + 10\alpha \le d_3 \le 80 - 30\alpha \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Z_\alpha^U = \max \quad -s_1u_1 - s_2u_2 + d_1v_1 + d_2v_2 + d_3v_3 \\
&s.t. \quad -u_1 + v_1 \le 10 \\
&-u_1 + v_2 \le 50 \\
&-u_1 + v_3 \le 80 \\
&-u_2 + v_1 \le (90-10\alpha) \\
&-u_2 + v_2 \le 60 \\
&-u_2 + v_3 \le 20 \\
&s_1 + s_2 \ge d_1 + d_2 + d_3 \\
&70+20\alpha \le s_1 \le 100-10\alpha, 40+20\alpha \le s_2 \le 80-10\alpha \\
&30+10\alpha \le d_1 \le 70-20\alpha, 20+10\alpha \le d_2 \le 50-10\alpha \\
&40+10\alpha \le d_3 \le 80-30\alpha \\
&u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

جدول ۱: α- برشهای هزینه کلی حمل و نقل برای ۱۱ مقدار α مثال۱

α	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	1/0
Z_α^L	2100	2180	2260	2340	2420	2500	2580	2660	2740	2820	2900
Z_α^U	5800	5600	5400	5200	5000	4800	4440	4080	3860	3680	3500



شکل۲.توابع عضویت $\tilde{Z}$ مثالهای ۱

راه حل ریاضی برنامه ریزی لینگو [۱۰] برای حل مسائل ریاضی فوق بکار رفته است .

نتیجه گیری :

چون در عالم واقعیت پارامترهای هر مسئله حمل و نقل(با محدویت های نا مساوی) به علت عوامل غیر قابل کنترل دقیقاً مشخص نیست از اینرو در نتایج حاصله معمولی ممکن است برخی اطلاعات سودمند از بین برود لذا تابع عضویت هدف مسئله

جهت اطلاعات بیشتر برای اخذ تصمیمات ترجیح داده می شود . روش پیدا کردن تابع عضویت هزینه کلی مسئله حمل و نقل زمانی که ضرائب هزینه ، عرضه و تقاضا اعداد فازی باشند بر مبنای اصل گسترش زاده به شکل زیر محاسبه گردید .

ابتدا مسئله حمل و نقل مورد نظر به دو برنامه ریزی ریاضی تبدیل که تابع عضویت مسئله به کمک α - برشهای کرانهای بالا و پایین آن محاسبه شد . چون تابع عضویت به صورت عددی بدست آمد و شکل ریاضی برای آن اثبات نگردید بنا بر این درجه عضویت هزینه یک مسئله حمل ونقل معین از α - برشهای آن تخمین زده شد . چنانچه مدل ریاضی تابع عضویت بدست آید درجه عضویت مستقیماً قابل محاسبه است.

مراجع

۱- بازرگان، محمد باقر، حمدی طه، آشنایی با تحقیق در عملیات، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ، چ اول ، چ پنجم ، ۱۳۷۷

۲- حسینی، حمید، بردارهای مایل فازی و کاربرد آن در برنامه ریزی خطی امکانی، ۱۳۷۷

۳- شهیدی پور، سید مهدی، اس.اس.رائو، بهینه سازی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ، چ اول ، ۱۳۷۳

۴- طاهری، سید محمود، آشنایی با نظریه مجموعه فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد ، چ دوم ۱۳۷۸

5-R.E.Bellman,L.A.Zadeh, Decision-making inafuzzy environment, Management Sci.17(1970) 141-164

6- H.Tanaka, T.Okuda, K.Asai, Onfuzzy mathematical programming , j. Cybernet. 3(1984)37-46

7- H.j. Zimmerman, Decision and optimization on fuzzy system , Internat. J. General system 2(1976)209-212.

8- C.V.Negoita, Fuzzines s in management, ORSA/TIMS Miami (1970)

9-M.M.GUPTA ,A.Kaufmann , Fuzzy Mathematical Models Engineering and managements

10-Lingo users guid , Lindo System Inc , Chicago , 1999