فصلنامه رویکردهای نوین در تحقیقات علوم پایه، فنی و مهندسی

سال پنجم، شماره ۱۹ ،زمستان ۱۴۰۱

ISSN: ٢٦٤٥-٥٤٣٩

www.jonarbset.ir

بررسی هندسی نگاشت های شبه متقارن و دامنه های ψ-یکنواخت

رسول کافی موسوی [۱]

[۱] عضو هیات علمی دانشگاه پیام نور

چکیده

هدف از این مقاله، ساختن یک دامنه ψ − یکنواخت G در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ است بطوریکه نگاشت همانی $id : (G, j_G) \to (G, k_G)$ یک نگاشت η − شبه متقارن برای هر همئومورفیسم $\eta: [0,\infty) \to [0,\infty)$ نباشد. سپس بررسی هندسی این نگاشتها بافرض G بعنوان یک منیفلد صورت خواهد گرفت. این نتیجه نشان می دهد که جواب مساله باز، ارائه شده توسط هاستو، کلاین، ساهو و وورینن، منفی است.

واژه‌های کلیدی: منیفلد، متر نسبی فاصله ای، متر شبه هذلولوی، دامنه یکنواخت، دامنه ϕ − یکنواخت، نگاشت شبه متقارن

۱. مقدمه

برای یک زیردامنه سره G از $\mathbb{R}^n$ و $z_1, z_2 \in G$، متر نسبی فاصله ای j_G به صورت

$$j_G(z_1, z_2) = \log\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|}{\min\{\delta_G(z_1), \delta_G(z_2)\}}\right),$$

تعریف می شود که $\delta_G(z_1)$ نشانگر فاصله اقلیدسی از z_1 به مرز ∂G از G است. تذکر می دهیم که فرم بالا از j_G، در [۱۰] معرفی شده، با اصلاحات کمی از یک متر که در [۲, ۳] بررسی شده، بدست آمده است.

برای یک کمان قابل اصلاح یا یک مسیر γ در G، طول شبه هذلولوی از γ در G برابر عدد زیر است:

$$\ell_{k_G}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{\delta_G(z)}.$$

متریک شبه هذلولوی $k_G(z_1, z_2)$ بین z_1 و z_2 بوسیله

$$k_G(z_1, z_2) = \inf\{\ell_{k_G}(\gamma)\},$$

تعریف شده است که اینفیمم (بزرگترین کران پایین)روی همه کمان های قابل اصلاح γ که z_1 و z_2 را در G به هم وصل می کنند، گرفته شده است. شناخته شده است [۳] که برای z_1 و z_2 در G، داریم $k_G(z_1, z_2) \geq j_G(z_1, z_2)$.

کلاس از دامنه های یکنواخت توسط مارتیو و ساروواس در ۱۹۷۹ معرفی شد [۶]. تعریف دقیق در زیر ارائه می شود.

تعریف ۱٫۱ : به ازای $c \geq 1$، یک دامنه G در $\mathbb{R}^n$، c- یکنواخت نامیده می شود به شرطی که هر زوج از نقاط z_1 و z_2 در G بتوانند بوسیله یک کمان قابل اصلاح γ در G وصل شوند و موارد زیر برقرار باشند

$$\begin{aligned}&(1)\ \min\{\ell(\gamma[z_1, z]), \ell(\gamma[z_2, z])\} \leq c\, \delta_G(z) \text{ for all } z \in \gamma;\\ &(2)\ \ell(\gamma) \leq c|z_1 - z_2|,\end{aligned}$$

که $l(\gamma)$ نشانگر طول γ و $\gamma[z_j, z]$ نشانگر بخش از γ بین z_j و z است. یک کمان γ با ویژگی های بالا یک کمان c - مخروطی مضاعف نامیده می شود. یک دامنه یکنواخت نامیده می شود اگر c – یکنواخت برای بعضی ثابت $c \geq 1$ باشد.

مشخصه زیر از دامنه های یکنواخت، بوسیله مترهای نسبی فاصله ای و شبه هذلولوی، توسط گهرینگ و اسگود ارائه شده است [۲]: یک زیردامنه سره G از $\mathbb{R}^n$ یکنواخت است اگر و فقط اگر ثابت $\mu \geq 1$ وجود داشته باشد، وابسته به فقط c ، بطوریکه برای هر z_1 و z_2 در G

$$k_G(z_1, z_2) \leq \mu j_G(z_1, z_2).$$

برقرار باشد.

تذکر می دهیم که مشخصه سازی بالا قدری متفاوت از مشخصه ارائه شده در [۲] است، به عنوان نتیجه اصلی یک ثابت جمع پذیر در طرف راست داشت. بعدا، توسط وورینن [۱۰] نشان داده شد که این ثابت ضروری نیست. با انگیزه بر این مشاهده، وورینن [۱۰] تعریف بسیار کلی زیر از دامنه های φ - یکنواخت را ارائه داد:

تعریف ۱٫۲ : فرض کنید $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ یک همئومورفیسم باشد. دامنه $G \subset \mathbb{R}^n$، φ - یکنواخت گفته می شود اگر برای هر z_1 و z_2 در G،

$$k_G(z_1,z_2) \leq \varphi\Big(\frac{|z_1-z_2|}{\min \delta_G(z_1), \delta_G(z_2)}\Big).$$

برقرار باشد.

بوضوح، یکنواختی، φ - یکنواختی را با $\varphi(t) = \mu \log(۱+t)$ برای $t > ۰$ با $\mu \geq ۱$ نتیجه می دهد. به آسانی می توان دید که عکس مطلب درست نیست.

نتایج جالب روی کلاس های بالا از دامنه ها توسط وایسالا [۷] بدست آمده است (همچنین [۸] را ببینید). بخصوص، او نشان داد که کلاس از دامنه های φ - یکنواخت با کلاس از دامنه های یکنواخت منطبق است اگر φ یک تابع تدریجی باشد، یعنی،

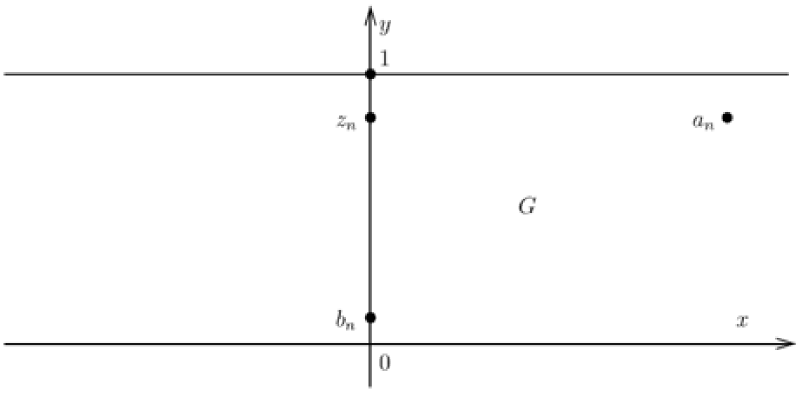
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0.$$

اخیرا، ویژگی های هندسی از این کلاس از دامنه ها در [۴] بررسی شده است. پایداری دامنه های φ - یکنواخت در [۵] اثبات شده است.

تعریف ۱,۳ : یک همئومورفیسم $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ، η - شبه متقارن گفته می شود اگر یک همئومورفیسم $\eta : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$|x-a| \leq t|x-b| \ \text{ implies } \ |f(x)-f(a)| \leq \eta(t)|f(x)-f(b)|$$

برای هر $t > ۰$ و برای همه نقاط $x, a, b \in \mathbb{R}^n$ برقرار باشد.



شکل 1. نقاط a_n, b_n, z_n در G

با کمک نگاشت های شبه متقارن، مولفان در [۴] یک شرط کافی برای φ - یکنواخت بودن یک دامنه در $\mathbb{R}^n$ بدست آوردند، که عبارت دقیق آن به صورت زیر است:

قضیه A: ([۴, Proposition 2.5]) اگر نگاشت همانی $\mathrm{id} : (G, j_G) \to (G, k_G)$ ، η - شبه متقارن باشد، آنگاه G، φ - یکنواخت است برای بعضی همئومورفیسم $\varphi : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ وابسته به فقط η .

در همان مقاله، مساله باز زیر مطرح شده است:

مساله باز ۱,۱ : ([۴, Question 2.6]) آیا عکس قضیه A درست است ؟

در بخش بعدی، مثالی خواهیم ساخت برای نشان دادن اینکه جواب سوال از مساله باز ۱,۱ منفی است.

۲. ارائه یک مثال

مثال ۲,۱ : فرض کنید $G = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} \quad : ۰ < y < ۱\}$ (شکل ۱ را ببینید). آنگاه

(۱) G، φ – یکنواخت با $\varphi(t) = t$ است؛

(۲) نگاشت همانی $id : (G, j_G) \to (G, k_G)$ برای هر همئومورفیسم $\eta : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ ، η - شبه متقارن نیست.

اثبات : اثبات ادعای (۱) در مثال به آسانی از [۹, Remark 2.19(2)] یا [۸, Remark 6.17] نتیجه می شود. در ادامه، ادعای (۲) را ثابت می کنیم. این ادعا را به روش ساختاری می خواهیم نشان دهیم. فرض کنید نگاشت همانی $id : (G, j_G) \to (G, k_G)$ ، برای بعضی همئومورفیسم $\eta : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ ، η - شبه متقارن باشد. برای هر a, z, b در G

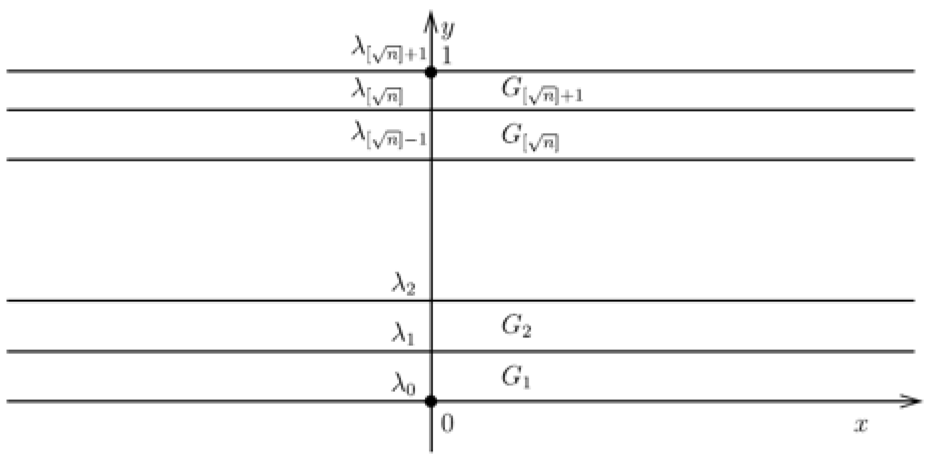
$$\frac{k_G(a, z)}{k_G(z, b)} \le \eta\left(\frac{j_G(a, z)}{j_G(z, b)}\right). \tag{2.1}$$

نتیجه می شود.

به جهت بدست آوردن یک تناقض، برای هر عدد صحیح $n \ge ۱۶$، فرض کنیم (شکل ۱ را ببینید)

$$a_n = \left(n, 1 - \frac{1}{n}\right), \;\; z_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right) \;\text{ and }\; b_n = \left(0, \frac{1}{n^3}\right).$$

آنگاه $a_n, z_n, b_n \in G$، و به علاوه داریم:



شکل 2. افراز G

ادعای ۲,۱ : $\frac{j_G(a_n, z_n)}{j_G(z_n, b_n)} < ۱$.

چون $n > ۳$ ، اثبات این ادعا به آسانی از دو حقیقت زیر نتیجه می شود:

$$j_G(a_n, z_n) = \log\left(1 + \frac{|a_n - z_n|}{\min\{\delta_G(a_n), \delta_G(z_n)\}}\right) = \log(1 + n^2)$$

و

$$j_G(z_n, b_n) = \log\left(1 + \frac{|z_n - b_n|}{\min\{\delta_G(z_n), \delta_G(b_n)\}}\right) = \log(n^3 - n^2).$$

ادعای ۲,۲ : $\frac{k_G(a_n, z_n)}{k_G(z_n, b_n)} > \frac{\sqrt{n}}{۸\log n}$.

برای اثبات نامساوی در ادعا، فرض کنید γ_n یک جئودزی شبه هذلولوی در G باشد که a_n و z_n را به هم وصل می کند، یعنی،

$$\ell_{k_G}(\gamma_n) = k_G(a_n, z_n). \qquad (2.2)$$

توجه کنید که وجود چنین γ_n از لم ۱ در [۲] نتیجه می شود. بوضوح

$$\ell(\gamma_n) \geq n. \qquad (2.3)$$

برای ادامه اثبات، یک افراز از G نیاز داریم. برای هر $m \in \{۱, \dots, [\sqrt{n}]\}$، فرض کنید (شکل ۲ را ببینید)

$$G_m = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ \lambda_{m-1} < y \leq \lambda_m\}$$

و

$$G_{[\sqrt{n}]+1} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ \lambda_{[\sqrt{n}]} < y < \lambda_{[\sqrt{n}]+1} = 1\},$$

که $[\sqrt{n}]$ نشانگر بخش صحیح از $\sqrt{n}$ است و $\lambda_m = \left(۱ - \frac{۱}{n}\right)\frac{m}{[\sqrt{n}]}$. بوضوح،

$$G = \bigcup_{m=1}^{[\sqrt{n}]+1} G_m,$$

و لذا حداقل یک $m \in \{۱, \dots, [\sqrt{n}] + ۱\}$ وجود دارد بطوریکه

$$\ell(\gamma_n \cap G_m) \geq m,$$

چون در غیر اینصورت، بدست می آوریم

$$\ell(\gamma_n) = \sum_{m=1}^{[\sqrt{n}]+1} \ell(\gamma_n \cap G_m) < \sum_{m=1}^{[\sqrt{n}]+1} m < n,$$

چون $n \geq ۱۶$، که متناقض با (۲,۳) است.

چون برای هر $z \in G_m$،

$$\delta_G(z) \leq \begin{cases} \lambda_m, & \text{if } m \in \{1, \ldots, [\sqrt{n}]\}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{if } m = [\sqrt{n}] + 1, \end{cases}$$

از (۲,۲) نتیجه می شود که

$$k_G(a_n, z_n) = \ell_{k_G}(\gamma_n) \geq \ell_{k_G}(\gamma_n \cap G_m) > \frac{1}{2}\sqrt{n}. \tag{2.4}$$

به علاوه، داریم

$$k_G(z_n, b_n) \leq \int_{[b_n, z_n]} \frac{|dz|}{\delta_G(z)} = \int_{\frac{1}{n^3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dt}{1-t} = 4 \log n - 2 \log 2, \tag{2.5}$$

که $[b_n, z_n]$ پاره خط در G با نقاط انتهایی b_n و z_n را نشان می دهد. لذا به آسانی می توانیم نامساوی در ادعای ۲,۲ را از (۲,۴) و (۲,۵) نتیجه بگیریم.

حال، آماده هستیم تا یک تناقض بدست آوریم. از (۲,۱) همراه با ادعاهای ۲,۱ و ۲,۲ نتیجه می شود که

$$\frac{\sqrt{n}}{8 \log n} < \frac{k_G(a_n, z_n)}{k_G(z_n, b_n)} \leq \eta\left(\frac{j_G(a_n, z_n)}{j_G(z_n, b_n)}\right) \leq \eta(1),$$

که غیرممکن است چون $\frac{\sqrt{n}}{۸ \log n} \to \infty$ وقتی که $n \to \infty$، و بنابراین، اثبات کامل می شود.

شناخته شده است که دامنه های همبند ساده در صفحه، شبه دیسک هستند [۶] (یا [۱])، و لذا متمم از چنین دامنه های یکنواخت همچنین یکنواخت است. بطور طبیعی، مساله زیر را بیان می کنیم [۱۱].

فرض کنید $\mathbb{R}^n \subsetneq G$ یک دامنه φ - یکنواخت باشد. شرطی روی φ پیدا کنید بطوریکه متمم $\mathbb{R}^n \setminus \bar{G}$ از G در $\mathbb{R}^n$ همچنین یک دامنه φ_1 - یکنواخت برای بعضی φ_1 باشد.

۳. نتیجه‌گیری

مهمترین نتیجه ای که از این مقاله و درواقع از این مثال می توان گرفت این است که جواب مساله باز، ارائه شده توسط هاستو، کلاین، ساهو و وورینن، منفی است.

منابع و مراجع

۱.F.W. Gehring, Characterizations of quasidisks, in: Quasiconformal Geometry and Dynamics, Lubin, 1996, in: Banach Center Publ., vol. 48, Poblish Acad. Sci., Warsaw, 1999, pp. 11-41.

۲.F.W. Gehring, B.G. Osgood, Uniform Domains and the quasi-hyperbolic metric, J. Anal. Math. 36 (1979) 50-74.

۳.F.W. Gehring, B.P. Palka, Quasiconformally homogeneous domains, J. Anal. Math. 30 (1976) 172-199.

٤.P. Hasto, R. Klen, S. Sahoo, M. Vuorinen, Geometric properties of φ-uniforms domains, arXiv: 1510.05847vl [math.MG], 2015.

٥.R. Klen, Y. Li, S. Sahoo, M. Vuorinen, On the stability of φ-uniform domains, Monatsh. Math. 174 (2014) 231-258.

٦.O. Martio, J. Sarvas, Injectivity theorems in plane and space, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 4 (1979) 383-401.

۷.J. Vaisala, Uniform domains, Yohoku Math. J. 40 (1988) 101-118.

۸.J. Vaisala, Free quasiconformality in Banach spaces. II, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I Math. 16 (1991) 255-310.

۹.M. Vuorinen, Capacity densities and angular limits of quasiregular mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 263 (1981) 343-353.

۱۰. M. Vuorinen, Conformal invariants and quasiregular mappings, J. Anal. Math. 45 (1985) 69-115.

۱۱. M. Vuorinen, X. Wang, A private conversation at the University of Helsinki, 2016.